Adrien CHAUD

Stage d'excellence

Vulgarisation et pédagogie : comment expliquer les mathématiques ?

université de BORDEAUX

20 mai — 14 juin 2019

Un stage dirigé par Vincent BRUNEAU

Thématique du stage

Pourquoi ce sujet de stage ?

➥ Un parti pris : travailler sur l'axe pédagogique

➥ Nécessité du métier d'enseignant-chercheur

➥ Volonté d'être utile au plus grand nombre

Thématique du stage

« Vulgarisation et pédagogie…

- Vulgarisation :

  « Fait d'adapter des notions, des connaissances scientifiques ou techniques afin de les rendre compréhensibles aux non-spécialistes. »

  — *Trésor de la langue française*, 2012.

- Pédagogie :

  « L'art d'enseigner, les méthodes propres à l'enseignement d'une discipline. »

  — *Grand dictionnaire terminologique de l'Office de la langue française.*

- Deux notions, deux travaux différents… pour deux publics différents.

Thématique du stage

...comment expliquer les mathématiques ? »

➥ Question fondamentale de l'enseignement des mathématiques.

➥ Plusieurs écoles... selon plusieurs niveaux de *classe*.
Expliquer d'un point de vue strictement mathématique ?
Aider à la compréhension via des explications moins rigoureuses ?

Cadre de stage

À l'Institut de Mathématiques de Bordeaux

➥ Un stage divisé en trois parties, avec trois responsables, sur trois vues différentes :

1. Évaluations et suggestions d'améliorations concernant le programme de première année de mathématiques
   — *avec Vincent BRUNEAU et Chantal MENINI*
2. Concept et réalisation d'un objet physique sur un problème mathématique, à destination des forums
   — *avec Xavier CARUSO*
3. Recherche personnelle sur la construction des nombres réels
   — *avec Marcu-Antone ORSONI*

Cadre de stage

L'Institut de Mathématiques de Bordeaux

- Fondé en 2007
- Trois sites : A33, Inria, la Victoire.
- Dirigé par Marc Arnaudon
- 134 chercheurs,
  24 personnels d'assistance,
  102 doctorants et posts-doctorants.
  Effectif 2018—2019

Évaluation des dispositifs en L1

L'organisation des mathématiques en première année

S1 MISIPCG

- Bases Mathématiques pour les Sciences
- Informatique
- Chimie
- Physique — Sciences pour l'Ingénieur
  - Mécanique du point et du solide
  - Électronique
- Méthodologie, Lettres et Communication
- Anglais
- Culture et Compétences Numériques
- Colorations (x2)
  - Coloration Mathématique
  - Autres colorations…

S2 MATHS - INFO

- Algèbre linéaire I
- Algorithmique des tableaux
- Deux UE parmi…
  - Analyse
  - Mathématiques discrètes
  - Introduction à la programmation en C
  - Bases de données et programmation web
- Méthodologie, Lettres et Communication
- Anglais
- Ouverture professionnelle I

S3 MATHS …

Évaluation des dispositifs en L1

L'organisation des mathématiques en première année

S1 MISIPCG

Bases Mathématiques pour les Sciences
- 6 crédits ECTS
- TD intégral : 57 heures
- Contrôle des connaissances (2018) : tests, DM, Wims, 1 DS, 1 DST.

Coloration Mathématique
- 3 crédits ECTS
- TD intégral : 28,5 heures
- Contrôle des connaissances (2018) : tests, 1 DS, 1 DST.

S2 Maths - Info

Algèbre linéaire I
- 6 crédits ECTS
- 24 heures de CM, 40 heures de TD
- Contrôle des connaissances (2019) : tests, 1 DS, 1 DST.

Analyse
- 6 crédits ECTS
- 24 heures de CM, 40 heures de TD
- Contrôle des connaissances (2019) : tests, DM, Wims, 1 DS, 1 DST.

Mathématiques discrètes
- 6 crédits ECTS
- 20 heures de CM, 36 heures de TD
- Contrôle des connaissances (2019) : tests, DM, 1 DS, 1 DST.

S3 Maths ...

Évaluation des dispositifs en L1

Les dispositifs d'accompagnement et d'approfondissement

➥ **Serveur d'exercices en ligne WIMS**

> Permet la pratique active d'exercices variables et autocorrigés

➥ **Vidéos complémentaires**

> Vidéos permettant de réexpliquer ou d'ajouter des informations au cours

➥ **Cours supplémentaires**

> Liens vers d'autres cours, afin d'avoir un autre point de vue sur les notions

➥ **Tutorat**

> Séances d'aide ou réponses rapides par des étudiants en année supérieure

➥ **Ressources d'approfondissement**

> Pages Internet présentant des notions complémentaires à celles du cours

Évaluation des dispositifs en L1

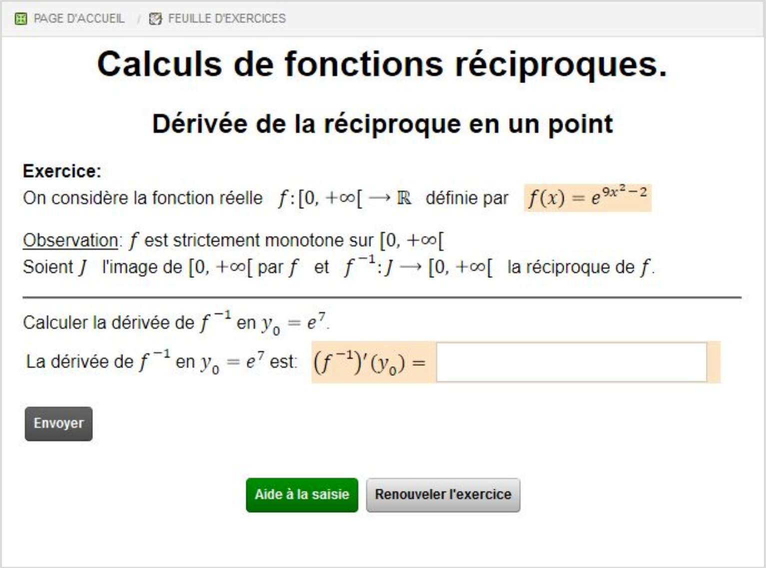
Une attention sur WIMS

➥ Serveur d'exercices paramétrés

➥ Formules et questions variables, tout en suivant une logique établie

➥ Exercices notables, compris dans le contrôle continu, avec prise en compte du nombre d'essais

➥ Permet donc la pratique d'exercices calculatoires, permettant de se concentrer sur les preuves en TD


PAGE D'ACCUEIL / FEUILLE D'EXERCICES

Calculs de fonctions réciproques.

Dérivée de la réciproque en un point

Exercice:
On considère la fonction réelle $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{9x^2-2}$

Observation: f est strictement monotone sur $[0, +\infty[$
Soient J l'image de $[0, +\infty[$ par f et $f^{-1} : J \longrightarrow [0, +\infty[$ la réciproque de f.

Calculer la dérivée de f^{-1} en $y_0 = e^7$.
La dérivée de f^{-1} en $y_0 = e^7$ est: $(f^{-1})'(y_0) =$

Envoyer

Aide à la saisie | Renouveler l'exercice

Exemple d'exercice WIMS d'analyse en 2019

Évaluation des dispositifs en L1

Une attention sur WIMS

Feuille	Exercice	<u>Pensée</u>	Commentaires
Feuille 0 / Outils	Développer deux expressions	Conservé	
	Factorisation I	Conservé	
	Equation du second degré	Conservé	
	Synthèse sur les équations quotient	Modifié	N'en mettre que 2 ou 3, et page par page, pour éviter de surcharger l'étudiant
	Equations factorisation	Conservé	
	Equation - factorisation et quotient	Conservé	
	Inéquation évidente	Conservé	
	Signe d'une fonction produit ou quotient	Modifié	Un avec le produit, puis un avec le quotient ?
Feuille 0 / Révisions	Transformation d'encadrement	Déplacé	Déplacé du chapitre 2
	Déduction d'encadrement	Déplacé	Déplacé du chapitre 2
	Dérivée de fonctions usuelles	Déplacé	Déplacé du chapitre 5, car requis dans d'autres matières au S1 // gagerait à être doublé (demander 2 voire 3 limites différentes)
	Dérivation d'un produit	Déplacé	Déplacé du chapitre 5, car requis dans d'autres matières au S1
	Formules (de dérivation)	Déplacé ?	Déplacé du chapitre 5, car requis dans d'autres matières au S1
	Valeurs remarquables trigonométriques	Nouveau	Exercices demandant des valeurs remarquables du cercle trigonométrique
Feuille 1 / Logique	Table de vérité	Conservé	
	Négation d'une phrase en français	Conservé	
	Négation et quantificateurs	Conservé	
	Contraposée avec le langage courant	Conservé	
	Contraposée	Conservé	
	Traduire / Formaliser (pour s'entraîner)	Conservé	
	Quantificateurs	Conservé	
Feuille 1 / Ensembles…	Description des éléments d'un ensemble	Conservé	
	Ecriture d'ensembles	Conservé	
	Comparer deux ensembles	Conservé	
	Sous-ensembles graphiques	Conservé	
	Sous-ensembles graphiques	Conservé	
	~~Description d'un sous-ensemble d'un plan~~	Supprimé	Hors programme de TD
	Changement de variable dans une somme 1	Conservé	
	Changement de variable dans une somme 2	Conservé	
	Changement de variable dans une somme 3	Conservé	

Extrait de la feuille d'évaluation des exercices WIMS

Suggestions de modifications des dispositifs

Évaluation et critiques des ressources disponibles

Quatre grands points ressortent :

➥ Donner une vision du programme

➥ Simplifier et supprimer les doublons de programme

➥ Retravailler les modalités d'évaluation

➥ Créer des visualisations explicatives

Algèbre linéaire

Cours

- **Aucune** visualisation ou vision d'ensemble, de programme : on ne sait pas ce que représente un espace vectoriel ou un sous-espace vectoriel, pas de lien entre les différents chapitres avant celui sur les applications linéaires
- Exercices qui perdent les étudiants. Avant de voir le théorème de la dimension sont faits de nombreux exercices longs qui ne serviront pas dans les annales, grâce au théorème. Étant en début de semestre, cela a tendance à perdre les étudiants qui ne comprennent déjà que peu le but du travail fait
- On ne sait même pas ce qu'est l'algèbre linéaire ou l'analyse en début de semestre…

Ressources

- Peu de possibilités de s'entraîner : les exercices (à partir de la mi-semestre) sont souvent uniques, c'est-à-dire que deux exercices traitent du sujet différemment. En l'absence d'un WIMS ou similaire, peu de possibilités de s'entraîner en dehors des exercices faits en TD.
- Les exercices contiennent de nombreux présupposés : existence de j, « suites à support fini », symbole de Kronecker…
- Peu d'annales, pas de ressources, un poly pas à jour : pas d'exercices sur les polynômes pourtant présents dans les annales…
- => Suggestion : avoir des ressources qui permettent d'approfondir le suje, quitte à être programme de L2, au lieu de dire aux étudiants qu'ils verront ceci l'an prochain

Analyse

Cours

- Les formules de Taylor & développements limités méritent une meilleure introduction que la troisième formule de dérivées. Peut-on imaginer un travail préparatoire aux cours sur ceci ? Typiquement ce qui pourrait faire l'objet des *TD groupes*

Suggestions de modifications des dispositifs

Des points de programme à affiner ou supprimer

➥ Manque d'explications sur les systèmes linéaires ;

➥ Linéarisation de fonctions trigonométriques, peu vues en S1 mais supposées connues au S2 ;

➥ Manque de *motivation* des cours : les étudiants ne comprennent pas la finalité des UE ;

➥ Exercices contenant de nombreux présupposés (*j*, symboles...) non vus ;

➥ Proposition d'un exercice de synthèse mélangeant analyse et algèbre, permettant de créer des liens logiques (nécessaires) entre les notions.

Suggestions de modifications des dispositifs

WIMS : une chronologie d'exercices à modifier

➥ Une série d'exercices à réaliser préalablement aux autres, afin de déterminer dès le début de l'année des points de difficulté ;

➥ Suppression des exercices d'approfondissement obligatoires, qui sans introduction ne font que décourager les étudiants ;

➥ Prévoir des explications à la correction de certains exercices complexes, où seule la réponse finale est demandée ;

➥ Une série d'exercices bilan, permettant de se retrouver dans des conditions d'examen, où les méthodes ne sont pas précisées.

Création de visualisations

Un travail de fond nécessaire

Objectif : Faire comprendre des formules en rapport avec la géométrie, via des visualisations interactives.

Critères : Des formules dont l’application peut être visible sur un schéma/plan.

Logiciel utilisé : GeoGebra, logiciel de géométrie dynamique, permettant d’exporter les réalisations pour les afficher en ligne.

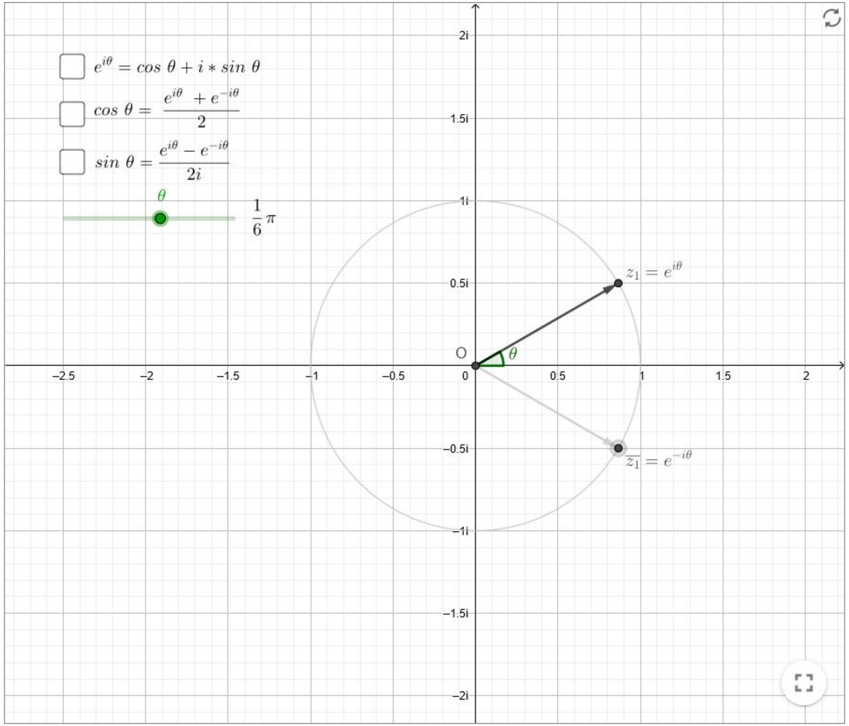
Création de visualisations

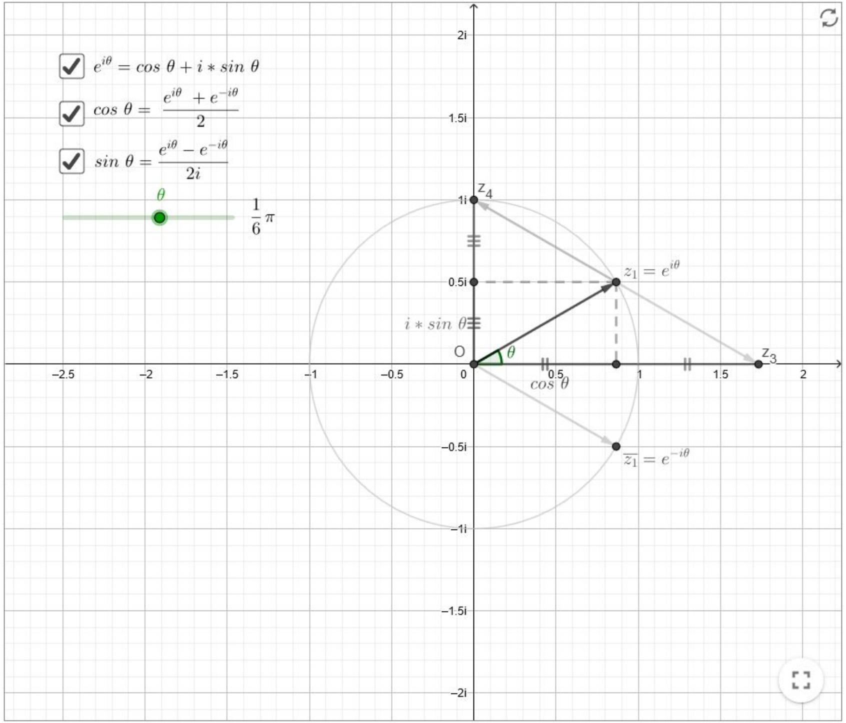
Des contraintes techniques à prendre en compte

- ➥ Contraintes de GeoGebra : formules utilisables, affichage possible…
- ➥ Contraintes d'affichage : nécessité de visualiser dans une petite fenêtre.
- ➥ Contraintes de clarté : les éléments doivent être lisibles et compréhensibles, malgré les contraintes d'affichage.
- ➥ Contraintes d'interactivité : comment proposer des valeurs variables sans alourdir la visualisation ?

Création de visualisations

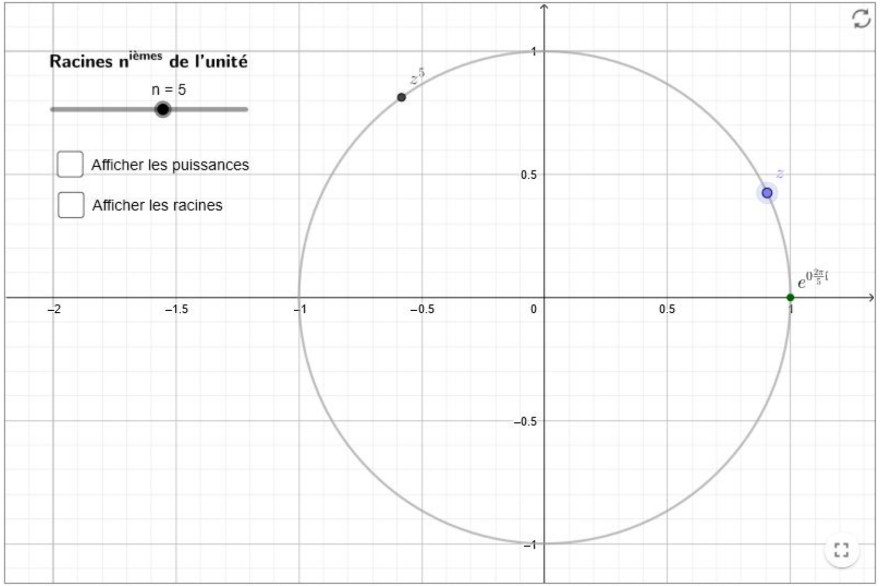
Formule d'Euler

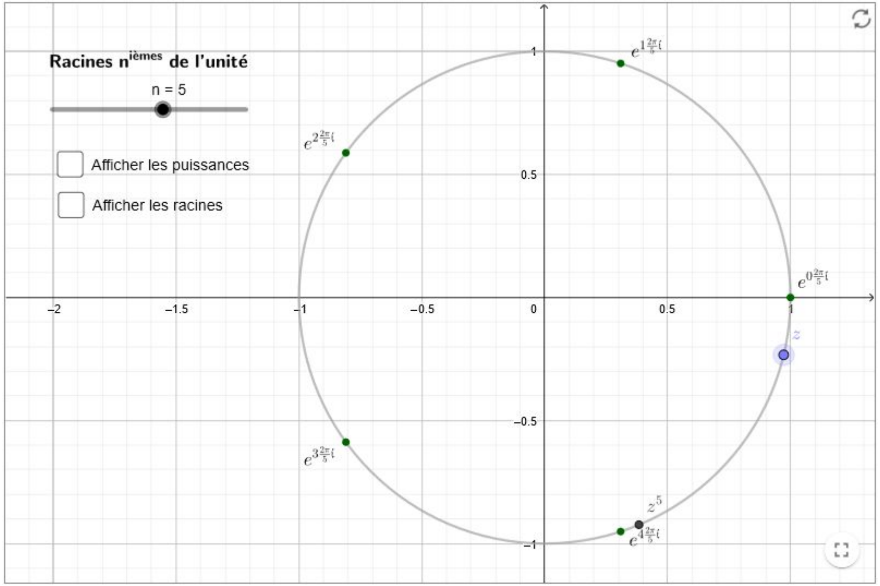




Création de visualisations

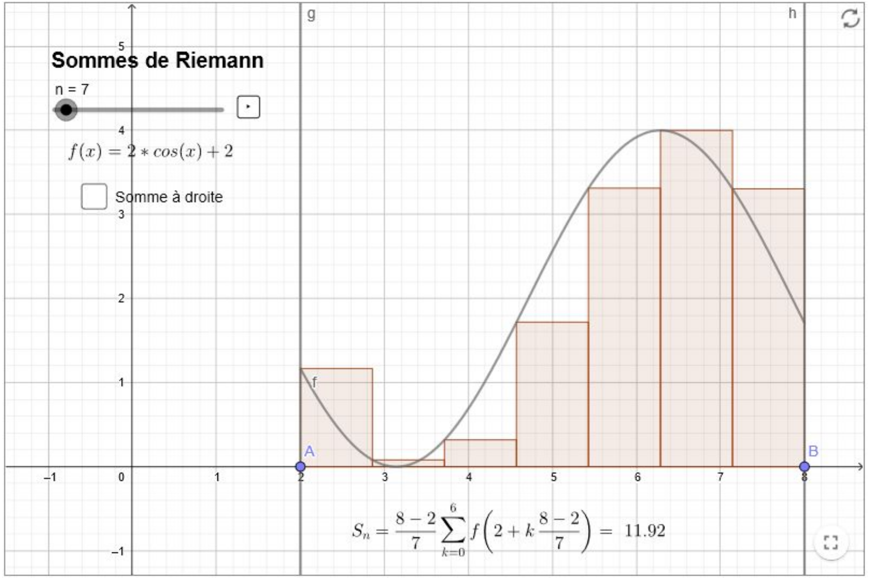
Racines de l'unité

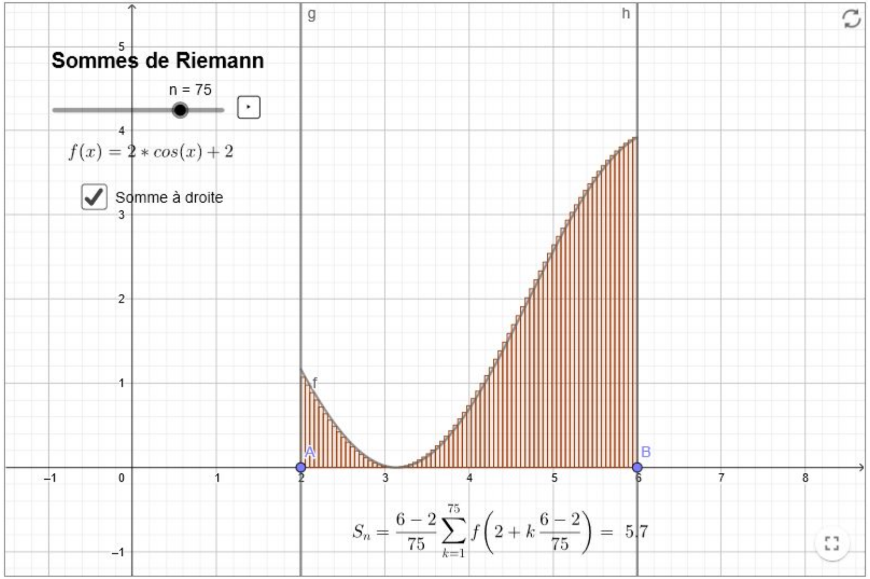




Création de visualisations

Sommes de Riemann





Retour sur l'axe pédagogique

Quels intérêts pour ces dispositifs ?

➥ Retravailler le cours dans une logique d'apprentissage progressif et de compréhension intrinsèque selon plusieurs points de vue ;

➥ Répétition prolongée de notions afin d'améliorer leur apprentissage ;

➥ Mise à disposition de ressources selon le niveau des étudiants ;

➥ Meilleure vision du domaine mathématique en question, au lieu de simples formules apprises.

Mise en situation

Pourquoi réaliser une modélisation ?

➥ Outil d'*appétence mathématique* : se servir d’un problème courant pour parler des mathématiques ;

➥ Permet d’attirer l’attention, de susciter la curiosité d’un public non-spécialiste ;

➥ Permet de montrer les réalisations faites par l’IMB et de promouvoir les mathématiques.

Mise en situation

Le problème de la courbe brachistochrone

Problème :

Quel est le chemin le plus rapide pour qu'une bille descende d'un point A à un point B ?

Réponse :

Une cycloïde.

Courbe d'une cycloïde. Extrait d'une image de Zorgit

Réalisation

Les contraintes à prendre en compte

Problématique	Possibilités	Contraintes	Arbitrage
Comment différencier les courbes ?	Plusieurs courbes parallèles ; une unique pente avec de nombreuses inclinaisons…	Économie de ressources	Deux pentes côte-à-côte, dont les courbes s'imbriquent comme un puzzle.
Comment faire tenir les billes sur la pente ?	Système de rigole imprimée en 3D ; tranche d'une planche creusée…	Contrainte de temps ; utilisable de ressources communes au Fablab	La bille descend entre deux planches parallèles avec un faible écart entre elles.
Comment retenir la bille de tomber ?	Système d'électro-aimant, de portail…	Nécessité de connaître de l'électronique, d'utiliser des piles…	Une fourchette tient en suspension les deux billes, et les lâche en même temps.
Comment chronométrer les billes ?	Système de détection laser, par capteur lumineux ; son de cloche d'arrivée…	Complexification d'un objet simple	Pas de système de chronométrage : l'écart doit être important pour être vu.

Réalisation

Les mathématiques qui entrent en jeu

➥ Outil de base du dessin vectoriel : les **courbes de Bézier**.

➥ Courbe de Bézier : courbe polynomiale définie par deux extrémités et au moins deux points de contrôle, tels que le début de la courbe de Bézier est sur la tangente $[P_0P_1]$, et la fin de la courbe sur la tangente $[P_2P_3]$.

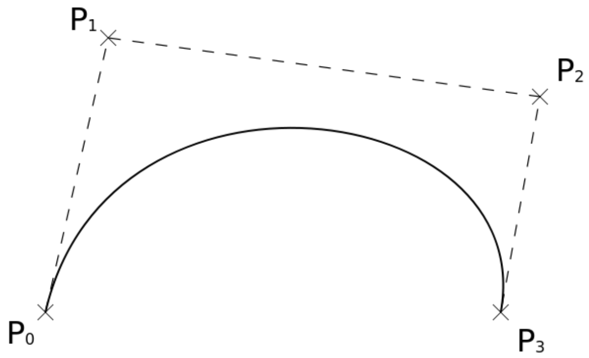


Image de MarianSigler

Réalisation

L'informatique qui entre en jeu

- Nécessité d'approximation de la cycloïde par de nombreux segments

```
def cycloid(t):
    theta = 314/100*t
    D = 37/100
    return vector((D/2*(theta - sin(theta)), D - D/2*(1 - cos(theta))))

N = 200
for t in range(N+1):
    M = cycloid(t/N).n()
    print("L %.2f %.2f " % (40+M[0]*1000, 360-M[1]*1000), end="")
```

```
M 40 10 L 40.00 10.02 L 40.00 10.09 L 40.00 10.19 L 40.01 10.34 L 40.01 10.54 L 40.02 10.78 L
40…
```

- Estimation du temps de parcours via les différentes courbes

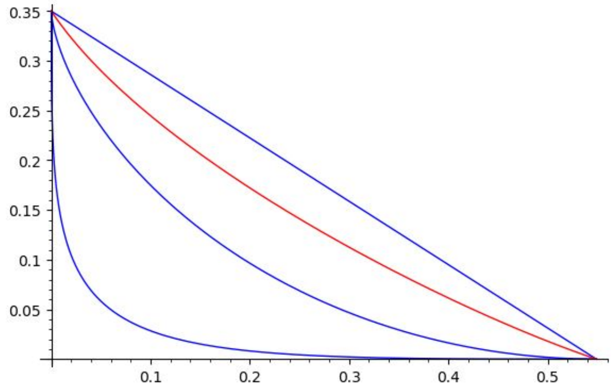
Réalisation

Écriture de fichiers vectoriels

- Image vectorielle : image définie par un ensemble de lignes, de courbes…
  — par opposition aux images matricielles, définies par les couleurs des pixels.

- Le format des images vectorielles : SVG, écrit en XML.

```
<path d="M 0 410 L 630 410 L 630 360 L 590 360 C 40 360 40 360
40 10 L 25 6.25 L 0 0 Z" fill="none" />
<path d="M 40 10 C 140 160 440 355 590 360" fill="none"
stroke="red" />
<path d="M 40 10 L 590 360" fill="none" stroke="none" />
<path d="M 40 10 L 40.00 10.02 L 40.00 10.09 L 40.00 10.19 L
40.01 10.34 L 40.01 10.54 L…
```



Réalisation

Autres étapes

- ➥ Découpe laser grâce à l'imprimante du Fablab de l'IUT de Gradignan
- ➥ Redécoupe des pièces au cutter afin de créer du jeu
- ➥ Vissage des pièces
- ➥ Ponçage des matériaux pour permettre l'emboîtement des pièces
- ➥ Vernissage des plaques de fibre de bois…

Retour sur l'axe pédagogique

L'ouverture des mathématiques au *public*

➥ Réalisation ici à titre de vulgarisation et attractive

➥ But recherché : susciter la curiosité, montrer des applications simples des mathématiques

➥ Objet laissant surtout de nombreuses interrogations, amenant à des explications

Sujet de recherche

La construction des nombres réels

Les nombres entiers sont définis comme la symétrisation des entiers naturels ; les rationnels sont construits comme le quotient de deux nombres entiers...

Problématique :

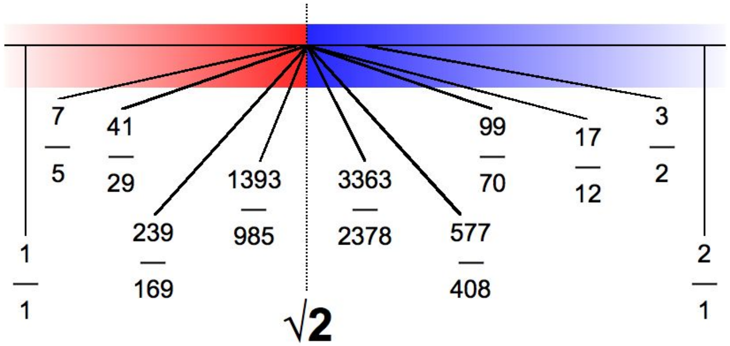
Comment est construit l'ensemble des nombres réels ?

Source d'étude : H. BOUALEM et R. BROUZET, *La Planète ℝ : Voyage au pays des nombres réels*, 2002.

Explications

Par les coupures de Dedekind

Une coupure de Dedekind d'un ensemble ordonné E est un couple (A, B) de deux sous-ensembles de E, tels que A et B forment une partition de E, et tous les éléments de A soient strictement inférieurs à B.



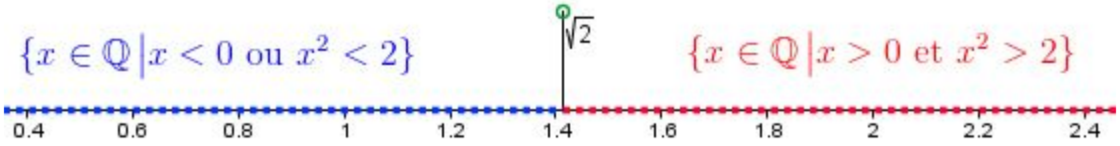
Coupure de Dedekind "définissant $\sqrt{2}$", par Hyacinth

Explications

Par les coupures de Dedekind

On peut donc *couper* un ensemble en deux... sans que le point de coupure ne soit dans cet ensemble.

$\mathbb{R}$ se construit comme l'ensemble des coupures de Dedekind de $\mathbb{Q}$: tout réel x s'assimile à l'ensemble des rationnels strictement inférieurs à x...



Coupure de Dedekind "définissant $\sqrt{2}$", par Ej Jj

Explications

Par les suites de Cauchy

Une suite est dite de Cauchy lorsque les termes de la suite se rapprochent les uns des autres : $\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geqslant N, \quad |u_p - u_q| < \epsilon$

D'après Cantor, tout réel peut être construit comme limite d'une suite de Cauchy à valeurs rationnelles.

$$(\sqrt{2})_n = (1, \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \frac{14142}{10000}, \ \ldots)$$

Explications

Par les suites de Cauchy

On quotiente, c'est-à-dire regroupe, les suites de Cauchy selon leur limite :

$$(u_n)\mathcal{R}(v_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$$

Ainsi, $\mathbb{R}$ sera définissable comme l'ensemble des classes d'équivalence des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.
Par exemple, π est assimilé à l'ensemble des suites ayant pour limite π.

Explications

Le travail de recherche

De nombreuses propriétés sont à démontrer pour prouver ces constructions :

- est-ce un corps ?
- comment définir leurs opérations ?
- est-il ordonné ? complet ?
- a-t-on unicité des réels ?
- l'ensemble $\mathbb{R}$ est-il unique, ie. les deux constructions sont-elles équivalentes ?

Retour sur l'axe pédagogique

De la nécessité de la recherche dans l'apprentissage des mathématiques

➥ Pour effectuer un travail de pédagogie, enseigner, il convient de connaître.

➥ La recherche est une étape nécessaire dans l'enseignement : recherche du sujet principal, mais aussi ensuite recherche de nouvelles méthodes pour arriver à la même finalité.

➥ La construction de $\mathbb{R}$ n'est qu'un exemple de problématique dont la multiplicité des points de vue permet une meilleure compréhension.

Comment expliquer les mathématiques ?

L'intérêt du travail de l'enseignant-chercheur

➥ Enseigner, c'est plus qu'expliquer : c'est faire apprendre.

➥ L'apprentissage doit être plein et éclairé. Toute la difficulté est à trouver les bons mots.

➥ Derrière la recherche se cache de nouveaux moyens d'expliquer.

➥ Ce but des enseignants-chercheurs est de plus connaître pour mieux partager ensuite.

pédagogue

➥ La pédagogie : maître-mot de l'enseignement.

➥ Visualisations, modélisations, progression, exercices en ligne… les moyens de faire apprendre évoluent, toujours dans l'optique de partager les connaissances.

Remerciements

- Vincent BRUNEAU, mon maître de stage ;
- Chantal MENINI, concernant les exercices WIMS ;
- Xavier CARUSO, responsable de la partie ‘Réalisation pédagogique’ ;
- Marcu-Antone ORSONI, doctorant et proposant du sujet de recherche ;
- Jean-Baptiste BONNEMAISON et Pierre GRANGÉ-PRADÉRAS, responsables du laboratoire de fabrication de l’IUT de l’Université de Bordeaux ;
- le personnel de la Bibliothèque de recherche Mathématiques et Informatique, pour son accueil.