université de BORDEAUX

Stage d'excellence

Rapport de stage à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux

Vulgarisation et pédagogie : comment expliquer les mathématiques ?

CHAUD Adrien
Maître de stage : ***Vincent Bruneau***
Avec ***Xavier Caruso*** *et* ***Marcu-Antone Orsoni****.*
20 mai — 14 juin 2019

Introduction

Dans le cadre du dispositif de stage d'excellence qui m'a été proposé, j'ai choisi d'effectuer mon stage à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux, le laboratoire de recherche de mathématiques, lié à l'Université de Bordeaux. J'ai ainsi contacté Vincent Bruneau, responsable de la licence de mathématiques à l'Université, qui a accepté d'être mon maître de stage.

L'Institut de Mathématiques de Bordeaux (IMB) regroupe depuis 2007 les équipes de mathématiques bordelaises de trois établissements : l'Université de Bordeaux, Bordeaux INP et le CNRS. Il est établi dans le bâtiment A33 de l'Université de Bordeaux, mais également dans le bâtiment INRIA Bordeaux, ainsi que dans l'Institut de rythmologie et de modélisation cardiaque, IHU Lyric, au sein de l'hôpital Xavier Arnosan, à Pessac.

Ce stage d'excellence est une occasion de m'approprier et de découvrir quelque peu en profondeur le monde de la recherche, et l'univers d'un enseignant-chercheur. Ensemble, nous avons convenu d'un stage d'excellence plus axé sur la pédagogie, nécessaire à la compréhension par les divers publics des mathématiques, et plus généralement de la matière enseignée. En effet, j'aspire à terme à être enseignant agrégé dans le secondaire, et la pédagogie est un outil-clé à maîtriser pour pouvoir partager ses connaissances avec des élèves, public jeune qui aspire à comprendre les mathématiques.

Cependant, la pédagogie n'est rien sans l'intérêt qui doit être porté par les différents publics au sujet. À ce titre, on parle de plus en plus de vulgarisation scientifique, pour nommer la volonté et les efforts permettant de faire comprendre des sujets scientifiques à un public non spécialiste, dans un effort de susciter la curiosité, voire de faire découvrir des vocations. Ce désir de pédagogie se retrouve sur une variété de supports, et permet de faire découvrir des pans entiers de sciences, autrefois réservées à un public de niche.

C'est ainsi que mon maître de stage et moi avons tourné ce stage vers la recherche — difficile mais nécessaire — de la compréhension des sujets mathématiques, travail des enseignants-chercheurs chargés de la réalisation des programmes, de licence notamment, ainsi que de leur enseignement. Afin de voir différents pans de cette thématique déjà large, ce stage a été divisé en trois parties, sur trois sujets différents, avec trois responsables, tous chercheurs (ou doctorant) de l'IMB. Dans le cadre de ce stage, j'ai étudié durant deux semaines le programme de première année de mathématiques du portail MISIPCG, afin d'y proposer des modifications, notamment concernant le serveur d'exercices en ligne WIMS. J'ai également durant cette période réalisé plusieurs visualisations en ligne à destination des futurs étudiants en première année, qui sont mises à disposition de ces derniers dès le premier semestre de l'année 2019 – 2020. J'ai ensuite, avec Xavier Caruso, chercheur à l'IMB, fabriqué un objet physique permettant de visualiser une problématique mathématique simple : quel est le parcours le plus rapide pour qu'une bille aille d'un point à un autre ? Cet objet a été entièrement conçu et réalisé par nous-même, grâce au concours du Fablab de l'IUT de l'Université de Bordeaux. Il a été et sera ensuite disponible sur les différents forums, sites et portes ouvertes de l'IMB et de l'Université, pour présenter l'Institut de Mathématiques, et potentiellement attirer des gens vers ce domaine. Enfin, et car la pédagogie ne fait pas tout, j'ai eu à étudier, grâce à Marcu-Antone Orsoni, doctorant à l'IMB, une thématique de recherche qui paraît simple à première vue, mais se révèle difficile à montrer : la construction des nombres réels. Cette semaine de recherche m'a permis de me confronter au travail plus théorique des enseignants-chercheurs ; et ce rapport de stage est une occasion directe de m'essayer à la pédagogie, et d'expliquer à un autre public un problème mathématique moins explicite.

I — Contributions au programme de première année

Les deux premières semaines de ce stage ont été consacrées à l'étude et à la proposition de modifications, concernant les programmes des enseignements mathématiques en première année de licence. À l'Université de Bordeaux, la licence mention mathématiques passe par un premier semestre, le portail MISIPCG, commun à la majorité des mentions de sciences, composé notamment d'une UE « Bases Mathématiques pour les Sciences » et d'une UE à choix « Coloration Mathématique », suivi d'un deuxième semestre, commun à la mention mathématiques et à la mention informatique, avec comme enseignements de mathématiques, une UE obligatoire, « Algèbre linéaire I », ainsi que deux UE à choix, « Analyse » et « Mathématiques discrètes ». Ainsi, il m'a d'abord été demandé d'étudier les quatre premières UE (n'ayant pas choisi « Mathématiques discrètes » comme UE à choix durant mon second semestre), afin de préciser les points de difficulté et de proposer des modifications sur le programme, notamment vis-à-vis du décrochage d'étudiants en raison de connaissances mal maîtrisées.

Ce travail de retour d'expérience et d'analyse des points considérés sensibles par les étudiants autour de moi durant l'année a permis de déceler plusieurs incompréhensions du programme, parfois liées à des visions différentes entre les rédacteurs de ce dernier et les étudiants. On peut citer un manque d'explications sur l'importance du pivot de Gauss dans la résolution de systèmes linéaires, qui n'est réellement considérée que dans l'enseignement « Algèbre linéaire » du deuxième semestre alors qu'elle a permis une meilleure compréhension des systèmes linéaires, et qui aurait pu être étudiée dès le premier semestre ; l'absence d'une vision d'ensemble du programme d'algèbre linéaire, qui paraît saccadé pour des étudiants qui peuvent ne pas voir le lien entre les notions enseignées, lien pourtant essentiel à la compréhension globale d'une matière par opposition à l'apprentissage de notions indépendantes...

L'étude a également concerné les ressources mises à disposition des étudiants sur leurs enseignements, et censées les aider dans l'apprentissage, voire dans l'approfondissement de notions abordées en cours. Ces ressources sont multiples, et dépendent des enseignements : cours supplémentaires et vidéos déposées sur la plateforme Moodle, sites Internet sur des problèmes mathématiques avancés, mais surtout serveur interactif d'exercices en ligne WIMS. Ce dernier a été utilisé, lors de l'année universitaire 2018 — 2019, sur deux UE de mathématiques : « Bases Mathématiques pour les Sciences », et « Analyse ». Les retours d'étudiants durant l'année, et l'analyse fine de la centaine d'exercices obligatoires proposés, ont été consignés dans des fiches, à destination notamment de Chantal Menini, enseignante-chercheuse de mathématiques et responsable du programme *Soutien à la transformation et à l'expérimentation pédagogiques*, à l'origine des exercices sur le serveur WIMS. À partir de ce travail préliminaire, et à la demande de cette dernière, une nouvelle organisation des exercices en ligne a été proposée, avec notamment des exercices de révision à faire nécessairement avant une certaine date, afin de pouvoir accéder aux exercices suivants (notés). Cela permet, dès les premières semaines, de voir les personnes ayant des difficultés sur les notions de bases. Ce plan est accompagné de propositions de nouveaux exercices, permettant notamment aux étudiants de faire un bilan sur leurs connaissances grâce à des exercices mélangeant diverses méthodes, de détermination de limite ou d'intégrale par exemple, vues tout au long du semestre. Le document bilan, disponible en annexe, a été distribué aux enseignants faisant parti du groupe STEP, pour une évolution de ce programme pour l'année universitaire 2019 — 2020.

À la suite de ce travail, plusieurs axes d'améliorations ont été proposés concernant les quatre enseignements de mathématiques étudiés : donner une vision d'ensemble du programme, lors des premiers enseignements du semestre, à l'instar de ce qui est fait avec le cours de « Bases Mathématiques pour les Sciences » où une page introductive explique les tenants et aboutissants du cours ; simplifier le programme, notamment concernant des notions vues en double sur les deux semestres ; poursuivre les modalités d'évaluation actuelles, grâce aux exercices WIMS ou aux devoirs maison réalisés en groupe, permettant de s'approprier des notions ; ou encore créer des visualisations, ressources essentielles, afin d'aider à la compréhension du cours ou à une meilleure assimilation des notions.

Durant la seconde semaine, il m'a été demandé d'approfondir ce dernier axe, en créant moi-même les visualisations qui serviront aux étudiants dès cette rentrée. Pour cela, je me suis servi du logiciel GeoGebra, un logiciel libre de géométrie dynamique, qui autorise l'intégration native de fichiers sur Internet (à travers une balise HTML `<iframe>`), permettant alors d'inclure ces visualisations sur la plateforme Moodle de l'enseignement et ainsi d'être accessible à tous les étudiants. Les visualisations réalisées ont porté sur des points du programme manquant d'explications, ainsi que là où une visualisation paraissait logique et facilement recréable sur le logiciel. Trois sujets ont été choisis : une explication visuelle des formules d'Euler, une formule liant la forme exponentielle et la forme trigonométrique d'un nombre complexe, ainsi que deux formules qui en décombent qui redéfinissent les fonctions sinus et cosinus ; une animation sur les racines $n^{ièmes}$ de l'unité, les nombres complexes dont la puissance z^n est égale à 1 (avec n non nul) ; et deux visualisations sur les concepts de sommes inférieure ou supérieure, et de sommes de Riemann, permettant de définir l'intégrale d'une fonction mathématique.

La première étape pour la réalisation de chacune de ces visualisations a été de les imaginer, et de les dessiner… à la main, sur une feuille de papier. Ceci permet de poser sur table les premières idées que l'on a de la visualisation, tout en vérifiant quels aspects mathématiques de celle-ci peuvent être conçus ou non. Ce préambule permet surtout un gain de temps considérable par rapport à une conception directement par ordinateur : il est en effet plus simple de dessiner l'animation sur papier, puis de la rectifier au besoin, que de créer *ex nihilo* un fichier de géométrie dynamique… Enfin, il est possible de vérifier au besoin les idées que l'on a de la visualisation, notamment sur les questions des notions à faire comprendre, avant d'entamer la partie technique de la réalisation de la visualisation.

Une fois cette étape de brouillon réalisée, j'ai pu commencer la réalisation sur GeoGebra des différentes animations. Fort heureusement, je connaissais déjà le logiciel, et avait ainsi quelques bases pour le réaliser. Pour du reste, la documentation officielle, disponible sur Internet à l'adresse `https://wiki.geogebra.org/fr/` m'a appris à manipuler les outils nécessaires à la réalisation d'animations interactives — permettant par exemple d'afficher des informations lorsque l'étudiant clique sur un bouton, ou de modifier en temps réel une formule selon les paramètres insérés par l'utilisateur.

Néanmoins, pour les besoins de la réalisation des concepts, en particulier l'affichage des formules de mathématiques, il m'a fallu apprendre des notions de LaTeX, un langage permettant de réaliser, à l'aide d'un interpréteur, un fichier respectant les conventions de mise en page mathématique. Ici, le LaTeX est nécessaire pour l'affichage de formules mathématiques — ce rapport est lui-même écrit en LaTeX — sur Geogebra. Les notions ont là aussi été apprises grâce à de la documentation en ligne, provenant de divers sites Internet, et — surtout — à l'expérimentation sur le logiciel GeoGebra.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Formule d'Euler, mise en forme avec LaTeX

Toujours est-il que la conception de ces quatre réalisations est une opération longue : il aura fallu plus de cinq heures par animation, afin de créer la visualisation, d'appliquer l'interactivité, de vérifier les réactions à la modification de paramètres par l'utilisateur... Ces visualisations, dont les liens sont disponibles en annexe, sont néanmoins complètes et hautement personnalisables, dans le sens où les étudiants peuvent modifier de nombreux paramètres (concernant la somme de Riemann, notamment) ou tenter de comprendre par eux-même la notion, et de « construire » la formule (pour les racines $n^{ièmes}$ de l'unité). Elles sont désormais incluses sur les plateformes Moodle sur des enseignements de « Bases Mathématiques pour les Sciences » et d'« Analyse », pour être utilisées par les étudiants dès la rentrée 2019.

Ce travail autour du programme de première année profite à tous, et m'a permis personnellement de comprendre les processus de fondation du programme de l'enseignement. Il y a en effet nombre d'arbitrages, qui sont invisibles au premier regard des étudiants, mais paraissent logiques a posteriori, avec une vision d'ensemble de l'année : choix d'exercices d'approfondissement pour des étudiants un peu plus avancés, de répétition de notions vis-à-vis des étudiants n'ayant pas compris au premier semestre... Ces arbitrages restent cependant des choix, qui peuvent être rediscutés, et ce stage a également permis de modifier certains points, à la suite de ces retours.

Il y a néanmoins une évolution dans la manière de faire apprendre, grâce en partie au groupe STEP mentionné ci-dessus : l'enseignement se fait avec des efforts, progressifs mais appuyés, de compréhension. Le cours n'est pas simplement un cours, il est lié à des ressources, des méthodes d'apprentissage, pour que l'étudiant puisse s'apprivoiser l'enseignement, et non se contenter d'apprendre des notions. La pédagogie se retrouve ici par les visualisations, par la suite d'exercices obligatoires donnés qui s'installent dans une logique presque narrative du cours, par la contextualisation des enseignements... Le public ici est déjà spécialisé, ou du moins avancé dans les mathématiques, et ces efforts de compréhension de la matière sont destinés à une meilleure progression.

II — Conception et réalisation d'un objet de vulgarisation mathématique

Néanmoins, tout le monde n'est pas avancé dans les mathématiques, et la pédagogie ne se limite pas au public spécialisé. Pour que les sciences soient ouvertes au plus grand nombre, il est nécessaire de les expliquer sans besoin d'un bagage scientifique, voire d'attirer le monde à partir de problèmes mathématiques simples, de la vie courante. La troisième semaine de mon stage d'excellence, portée par Xavier Caruso, chercheur au CNRS et affecté à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux, a concerné ce thème, avec comme objectif la fabrication d'un objet réel, à destination du grand public lors de forums par exemple, permettant de s'interroger sur un problème physique, à lien mathématique. Plus précisément, le but de cette semaine a été de construire une expérience consistant en deux courbes, permettant de faire rouler une bille par dessus, afin de faire réfléchir puis résoudre au public la question suivante : **quel est le parcours pour qu'une bille aille le plus rapidement d'un point A à un point B** avec du dénivelé ?

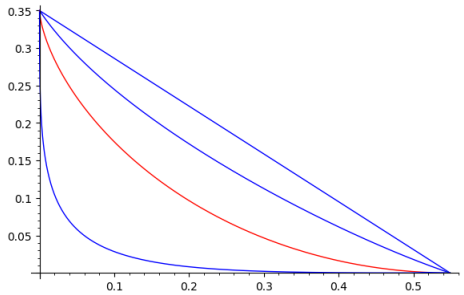
En mathématiques, cette interrogation se nomme le problème de la courbe brachistochrone. Dans la pratique, la courbe solution de ce problème est une **cycloïde**. Une cycloïde est la courbe formée par un point fixe sur un disque en rotation le long d'une droite ; en d'autres termes, c'est la trajectoire que suivrait un chewing-gum collé à la roue d'un vélo en mouvement. Cette courbe a par ailleurs également la propriété de la courbe tautochrone : si on lâche deux billes sans vitesse initiale à deux endroits du parcours, elles arriveront **au même moment**. L'intérêt d'un tel atelier est ainsi multiple : par intuition et logique d'évidence, une partie du public sera tenté de penser à la droite comme solution du problème ; et lorsque la vraie solution sera donnée, les spectateurs seront encore plus surpris des multiples propriétés de celle-ci, et de l'aisance de sa conception. La cycloïde a pour équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(\theta) = \frac{D}{2}(\theta - \sin(\theta)) \\ y(\theta) = \frac{D}{2}(1 - \cos(\theta)) \end{cases}$$

L'objet a été entièrement conçu par nos soins, puis fabriqué à la découpe laser au Fablab (laboratoire de fabrication) Coh@bit, rattaché à l'IUT de l'Université de Bordeaux, grâce à leurs responsables M. Jean-Baptiste Bonnemaison et M. Pierre Grangé-Pradéras, qui nous ont acceptés dans leurs locaux et ont aidé à la conception technique de l'atelier. Les détails des choix faits, ainsi que l'ensemble des étapes de la conception et de la réalisation sont précisés dans la documentation mise à disposition sur l'espace Intranet du Fablab, disponible à l'adresse `https://projets.cohabit.fr/redmine/projects/imb-course-de-billes/wiki/Wiki`, qui est également présente en annexe.

La première étape de la conception a été de faire des arbitrages concernant la structure, les courbes choisies, ou la méthode de participation du public. Afin d'économiser les ressources disponibles, choix a été fait de réaliser un atelier de courses de billes avec deux pentes placées côte-à-côte sur un support, composées de deux planches fines espacées d'un centimètre sur lesquelles tiennent les billes en équilibre. Ces planches sont découpées afin d'obtenir quatre profils de pentes différents, qui peuvent s'imbriquer les uns sur les autres grâce à des entretoises et créer quatre courbes différentes, sur lesquelles viennent rouler les billes. Ainsi, les spectateurs peuvent choisir et monter par eux-même deux courbes, et

comparer le moment d'arrivée de chacune. Pour s'assurer que les billes soient lâchées en même temps, une fourchette tient en suspension les deux billes, qui les fait tomber une fois retirée. Enfin, et d'après les calculs élaborés avant la fabrication des pentes, il n'a pas été choisi de faire un système de chronométrage, la différence pouvant normalement être visible à l'œil. Quatre courbes ont été choisies, d'inclinaisons très différentes afin d'offrir un large choix au public : la cycloïde ; la droite reliant le point de départ et le point d'arrivée ; mais aussi une courbe intermédiaire entre ces deux-ci, de faible courbure ; ainsi qu'une hyperbole, un profil très courbé avec un départ vertical et une arrivée à l'horizontal.



Courbes choisies pour l'atelier, de haut en bas :
la droite, une courbe de faible courbure, la cycloïde (en rouge), et une hyperbole.

Afin de faire découper par l'imprimante les planches de MDF (*Medium Density Fiberboard*, panneau de fibres à densité moyenne) utilisées, les croquis des découpes doivent être réalisés et importés au format SVG, c'est-à-dire sous la forme d'images vectorielles. Ce format consiste à créer une image à partir de formes géométriques (droites, polygones, cercles...) au lieu de définir la couleur de chaque pixel d'une image. Les images vectorielles sont ainsi facilement traitables par l'imprimante, qui sait quelles formes produire. Celles-ci sont écrites en XML, un langage de balisage qui cadre les fonctions du format SVG. Afin de me faire apprendre ce langage, et en raison de la simplicité de nos patrons de découpe, choix a été fait par M. Caruso de créer ces derniers à la main, en écrivant les lignes de code dessinant les différentes formes, au lieu de les dessiner avec des logiciels de dessin vectoriel. Nous nous sommes ainsi aidé de la documentation technique du langage, disponible sur une plateforme libre de la fondation Mozilla (à l'adresse `https://developer.mozilla.org/`) afin d'écrire les différentes formes. Une étape supplémentaire a été d'approximer la cycloïde par des courbes de Bézier, l'outil de base de création de courbes au format vectoriel. [1] Pour cela, nous avons conçu un algorithme en Python, langage de programmation, afin de déterminer plusieurs points de contrôles permettant d'obtenir un simili de cycloïde. Cependant, le résultat n'était pas satisfaisant lors de l'écriture en SVG, et nous avons finalement choisi d'approximer la cycloïde en centaines de segments, ce qui est amplement suffisant en raison de la précision de l'imprimante et de la taille relativement réduite (40 x 60 centimètres) des planches. Pour obtenir ces points, nous avons là aussi utilisé un algorithme écrit en Python, qui a calculé les coordonnées de ceux-ci à partir des équations paramétriques de la cycloïde, mentionnées ci-dessus.

La conception des fichiers, pour les faces et les entretoises et supports permettant de fixer la structure, a pris une dizaine d'heures. Les fichiers ont ensuite été envoyés à l'imprimante laser, qui a découpé les planches de fibre de bois. Cependant, la planche de dix millimètres d'épaisseur, utilisée pour les entretoises, n'a été que peu découpée, et il

1. Une courbe de Bézier est une courbe définie par deux extrémités, A et B, et (au moins) deux points de contrôle A' et B', tel que la courbe soit tangente à la droite (AA') au point A, et à la droite (B'B) au point B.

a fallu la redécouper à la main. Le reste n'est que travail manuel : découpage au cutter des pièces, limage de celles-ci afin d'améliorer leur emboîtement, vissage des planches aux entretoises, montage de la structure et vernissage.

Visuellement, le résultat obtenu est conforme à nos prévisions. Plusieurs points sont à regretter, comme le manque de stabilité des billes sur la fourchette qui sert à les maintenir avant le départ, ou des rebonds avec la courbe hyperbolique, beaucoup trop pentue au départ. Les temps de parcours, quant à eux, sont conformes à nos prévisions... mais nous avons surestimé le temps de réaction de l'œil humain : en fin de compte, l'écart est visible si on s'y concentre dessus, mais n'est pas significatif, mis à part celui entre le temps de parcours le plus faible (la cycloïde) et celui le plus élevé (la droite). L'expérience reste néanmoins intéressante, et ce problème peut être corrigé en utilisant des cloches ou autres appareils sonores permettant d'entendre l'arrivée de la bille : il peut être plus simple de distinguer deux sons différents que le passage de deux billes en fin de courbe. Nous avons en revanche été surpris de la réussite de l'expérience de la propriété de la courbe tautochrone : en lâchant nos deux billes à deux endroits différents sur les cycloïdes, on aperçoit bien que les deux arrivent en même temps en fin de courbe — même si naturellement pas avec la même vitesse.

L'atelier de courses à bille, avec au premier plan la cycloïde, au second plan la droite.

Cet atelier de courses de bille est visible et appartient désormais à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux (dont le logotype est par ailleurs gravé sur la réalisation), et sera montré lors de futures portes ouvertes ou autres ateliers promouvant les mathématiques et les sciences, à destination du public. Cette production s'inscrit dans une logique de présentation des mathématiques, à caractère pédagogique. Elle permet de montrer la présence fondamentale des mathématiques dans des problèmes « courants », de parler à un public non-spécialisé de questions mathématiques, d'intriguer voire d'attirer des personnes vers ces domaines scientifiques. À partir d'un problème simple, et dont la réponse paraît évidente (mais fausse), la production permet d'évoquer les courbes cycloïdales, les équations paramétriques, de la physique également, voire de l'informatique, en parlant de sa conception. Certes, ce problème n'est pas commun dans l'enseignement mathématique, mais la production est un moyen réel de vérifier une démonstration, d'expliquer la mathématique, pour un public non-avisé.

III — Un aperçu de la construction de $\mathbb{R}$

Il est cependant nécessaire, pour pouvoir expliquer un sujet, de bien le maîtriser ; et car ce stage d'excellence est aussi synonyme de stage de recherche, la quatrième semaine de ce stage a été consacrée à la découverte et à la recherche personnelles sur un thème mathématique de difficulté modérée, mais qui n'est plus étudié en licence : la construction des nombres réels. Ce sujet de stage m'a été proposé par Marcu-Antone Orsoni, doctorant au sein de l'Institut de Mathématiques de Bordeaux, avec qui j'ai pu échanger plusieurs fois afin de faire des retours et d'avoir des avis. L'ouvrage au cœur de ce sujet est le livre *La Planète* $\mathbb{R}$ *: Voyage au pays des nombres réels* de Hassan Boualem et Robert Brouzet. Néanmoins, pour comprendre les notions mentionnées dans celui-ci, j'ai dû également étudier le livre *Arithmétique* de François Liret, ouvrage permettant de comprendre des notions sinon vues en deuxième année de licence mathématique : relations d'équivalence, corps, anneaux... Ainsi, pendant plusieurs jours, j'ai eu à étudier et à comprendre deux méthodes de construction des nombres réels, par les coupures de Dedekind et par les suites de Cauchy, notamment en réalisant des démonstrations non mentionnées dans l'ouvrage.

Une coupure de Dedekind d'un ensemble total ordonné, appelé E, est un couple (A, B) de sous-ensembles non vides de E tel que l'union de A et B soit E, leur intersection soit vide (c'est donc une partition de E), et que tout élément de A soit strictement inférieur à tout élément de B. Ainsi, une coupure de Dedekind divise l'ensemble en deux parties, avec comme marqueur de séparation un élément qui n'est pas nécessairement dans E, mais dont tous les éléments de la partie A sont strictement inférieurs, tous les éléments de la partie B sont supérieurs ou égaux. En ce sens, une coupure de Dedekind sur $\mathbb{Q}$, l'ensemble des rationnels, définit un des *trous* de celui-ci : l'ensemble des rationnels n'est en effet pas dit complet — il existe des trous entre deux nombres rationnels consécutifs. En redéfinissant une coupure de $\mathbb{Q}$ comme le sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ tel que tous les éléments de ce sous-ensemble soient strictement inférieurs à un élément hors de ce sous-ensemble, c'est-à-dire n'admette pas de plus grand élément, alors on peut assimiler l'ensemble des nombres réels à l'ensemble des coupures de $\mathbb{Q}$. En effet, on peut s'imaginer $\mathbb{R}$ à partir de l'ensemble des parties de nombres rationnels inférieurs à un certain élément, qui n'est pas dans $\mathbb{R}$... (par exemple, l'ensemble des rationnels inférieurs à $\sqrt{2}$)

On peut également définir $\mathbb{R}$ à partir des suites de Cauchy. Une suite est de Cauchy lorsque les termes de la suite se rapprochent les uns des autres dans la suite, autrement dit :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geqslant N, \quad |u_p - u_q| < \epsilon$$

Or, tout réel peut être construit comme limite d'une suite de Cauchy à valeurs rationnelles : par exemple, le réel $\sqrt{2}$ est limite de la suite de Cauchy (u_n) de rationnels définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

L'idée est alors d'assimiler les réels comme l'ensemble des suites de Cauchy à valeurs rationnelles. Cependant, il faut quotienter, c'est-à-dire regrouper les suites de Cauchy, par une relation d'équivalence : la relation d'équivalence telle que deux suites soient équivalentes si elles ont la même limite.

$$(u_n)\mathcal{R}(v_n) \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$$

On peut alors construire l'ensemble des réels comme l'ensemble des classes d'équivalence des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire l'ensemble des ensembles de suites de Cauchy à même limite (par exemple, π serait assimilié à l'ensemble des suites de Cauchy avec comme limite π).

Il y a cependant de nombreuses propriétés à démontrer pour vérifier que ces méthodes donnent l'ensemble des réels — il faut notamment vérifier leur complétude, qu'il y ait une relation d'ordre, définir leurs opérations… — qui ont été étudiées durant cette semaine. Les rencontres avec Marcu-Antone Orsoni ont permis de vérifier la bonne compréhension de ces notions, et le cas échéant de l'interroger en cas de problème. Ce travail de recherche est primordial pour les enseignants-chercheurs, et tout travail de pédagogie passe nécessairement par cette étape. À partir des travaux de recherche (et de compréhension d'autres réalisations), ceux-ci peuvent expliquer, contextualiser et faciliter l'appréhension de ces notions à un autre public, comme il a été fait ici.

Conclusion

Durant ces quatre semaines, j'ai vu et été personnellement investi dans trois degrés, trois étapes, de l'explication des mathématiques : de la compréhension de la recherche avec l'étude de la construction de $\mathbb{R}$, à la réalisation de visualisations et d'objet à caractère pédagogique, en passant par l'écriture de plans et d'exercices d'apprentissage pour futurs étudiants. Toutes les trois sont essentielles dans la volonté de faire apprendre, pour un public étudiant ou novice, les sciences, avec comme objectif la transmission du savoir. La recherche est évidemment nécessaire, pour comprendre d'abord ce qui est enseigné ensuite ; c'est le travail quotidien des enseignants-chercheurs dans leur domaine respectif, qui partagent par la suite leurs connaissances par des livres et autres ouvrages destinés au public scientifique. Les enseignants-chercheurs chargés de l'élaboration des programmes doivent également faire preuve de recul, afin de réaliser un programme et des cours explicatifs et compréhensifs, grâce à des outils innovants permettant aux étudiants de mieux comprendre le cours : visualisations, exercices en ligne, ressources spécifiques... Derrière le cours se cache tout un travail de réflexion qui est souvent invisible pour les étudiants. Et car les mathématiques ne sont pas réservées qu'à une élite, quoiqu'on en dise, des enseignants-chercheurs créent des initiatives visant à éduquer et attirer le public lambda vers la science, en les expliquant sans nécessité de bagage scientifique : la vulgarisation, qui ici est passée par la réalisation d'un atelier de courses de billes, mélangeant physique et mathématique.

Ce stage d'excellence m'a ainsi permis de passer de l'autre côté du cours, pour voir les coulisses et les initiatives des enseignants-chercheurs pour l'apprentissage des connaissances. Grâce à eux, les mathématiques ne sont pas réservées à une infime partie de la population, mais bien ouvertes à tous et au *commun des mortels*. Ce stage m'aura également fait apprendre de nombreuses compétences et langages informatiques : le LaTeX, qui compose ce rapport, le langage du format SVG, l'utilisation de logiciel de géométrie dynamique (GeoGebra), d'une imprimante laser... Autant de points qui sont nécessaires et seront réutilisés par la suite, durant mon cursus universitaire. Je tenais enfin à remercier mon maître de stage Vincent Bruneau, ainsi que Chantal Menini, Xavier Caruso et Marcu-Antone Orsoni pour l'investissement et le temps qu'ils m'ont consacrés durant ce stage, ainsi que la Bibliothèque de recherche mathématique et informatique qui m'a accueilli durant les deux premières semaines, et M. Jean-Baptiste Bonnemaison et M. Pierre Grangé-Pradéras pour l'ouverture des portes de leur laboratoire de fabrication.

Pour la suite de mon cursus étudiant, et après avoir bien découvert le monde de la recherche, je ne souhaite toutefois pas y continuer et devenir enseignant-chercheur. Ce stage d'excellence m'aura en effet bien montré toutes les qualités, les compétences nécessaires à la recherche scientifique, et je n'y suis pas destiné. A l'inverse, il m'a conforté dans mon projet universitaire : je me suis en effet plu à étudier les cours, à analyser les ressources et les exercices en ligne, à proposer des suggestions de programme ainsi qu'à créer les visualisations qui seront utilisées cette année. La pédagogie et l'enseignement me plaisent, et sont réellement la vocation que je porte pour mon avenir. À ce titre, le stage d'excellence que j'ai réalisé a permis de confirmer mon projet professionnel, être enseignant dans le secondaire, pour toute la pédagogie et l'attention nécessaire au partage de connaissances à des élèves. J'en sors ainsi motivé, et confiant pour mon avenir.

Annexes

1. Rapport d'évaluation des exercices WIMS
2. Concepts d'exercices WIMS
3. Visualisations de notions de L1
4. Documentation technique et scientifique de l'atelier de course de billes

Plan pour Bases Mathématiques pour les Sciences

Feuille	Exercice	Pensée	Commentaires
Feuille 0 / Outils	Développer deux expressions	Conservé	
	Factorisation I	Conservé	
	Equation du second degré	Conservé	
	Synthèse sur les équations quotient	Modifié	N'en mettre que 2 ou 3, et page par page, pour éviter de surcharger l'étudiant
	Equations factorisation	Conservé	
	Equation - factorisation et quotient	Conservé	
	Inéquation évidente	Conservé	
	Signe d'une fonction produit ou quotient	Modifié	Un avec le produit, puis un avec le quotient ?
Feuille 0 / Révisions	Transformation d'encadrement	Déplacé	Déplacé du chapitre 2
	Déduction d'encadrement	Déplacé	Déplacé du chapitre 2
	Dérivée de fonctions usuelles	Déplacé	Déplacé du chapitre 5, car requis dans d'autres matières au S1 // gagerait à être doublé (demander 2 voire 3 limites différentes)
	Dérivation d'un produit	Déplacé	Déplacé du chapitre 5, car requis dans d'autres matières au S1
	Formules (de dérivation)	Déplacé ?	Déplacé du chapitre 5, car requis dans d'autres matières au S1
	Valeurs remarquables trigonométriques	Nouveau	Exercices demandant des valeurs remarquables du cercle trigonométrique
Feuille 1 / Logique	Table de vérité	Conservé	
	Négation d'une phrase en français	Conservé	
	Négation et quantificateurs	Conservé	
	Contraposée avec le langage courant	Conservé	
	Contraposée	Conservé	
	Traduire / Formaliser (pour s'entraîner)	Conservé	
	Quantificateurs	Conservé	
Feuille 1 / Ensembles…	Description des éléments d'un ensemble	Conservé	
	Ecriture d'ensembles	Conservé	
	Comparer deux ensembles	Conservé	
	Sous-ensembles graphiques	Conservé	
	Sous-ensembles graphiques	Conservé	
	~~Description d'un sous-ensemble d'un plan~~	Supprimé	Hors programme de TD
	Changement de variable dans une somme	Conservé	
	Changement de variable dans une somme	Conservé	
	Changement de variable dans une somme	Conservé	
	Formule du binôme	Conservé	
	Formule du binôme - numérique	Conservé	
Feuille 2 / Réels, inégalités…	Correspondance distance - valeur absolue	Conservé	
	Distance et valeur absolue	Conservé	
	~~Transformation d'encadrement~~	Déplacé	Déplacé au chapitre 0
	~~Déduction d'encadrement~~	Déplacé	Déplacé au chapitre 0
	Résolution avec une valeur absolue	Conservé	
	Résolution avec deux valeurs absolues	Conservé	
	Valeur absolue -> Intervalle	Conservé	
	Région du plan et inégalités	Modifié	Doit être plus vu en TD, pour pouvoir être réalisé
	Région du plan et inégalités	Conservé	Doit être plus vu en TD, pour pouvoir être réalisé
	~~Inéquation évidente~~	Supprimé	Déjà dans le chapitre 0 (s'il venait à être obligatoire)
	Quantificateurs	Conservé	
Feuille 3 / Système linéaire	Systèmes linéaires	Modifié	Doit être revu, car le système actuel ne permet pas de comprendre le système
	Opérations sur les lignes	Conservé	Et à amplifier, c'est le bon exercice qui explique le pivot (devrait être mentionné)

Plan pour Bases Mathématiques pour les Sciences

	Système à résoudre	Nouveau	Avant d'attaquer les produits scalaires, un exercice avec un simple système à résoudre, pour vérifier que l'étudiant a bien compris
	Produits scalaires donnés v2	Modifié	Demander d'abord à écrire le système (?), puis le faire résoudre.
	Relation linéaire	Conservé	
	Trouver combinaison de vecteurs	Conservé	
	Trouver combinaison	Conservé	
	A partir de polynômes	Conservé	
	A partir de fractions rationnelles v1	Conservé	
	A partir de fractions rationnelles v2	Conservé	
	~~A partir de fractions rationnelles v2b~~	Supprimé ?	Fait doublon avec le v2 ?
	A partir de fractions rationnelles v3	Conservé	
Feuille 4 / Nombres complexes	Intervalle et donnée trigonométrique I	Conservé	
	Intervalle et donnée trigonométrique II	Conservé	
	Opération et complexe 2	Conservé	
	Opération et complexe 3	Conservé	
	Fraction	Conservé	
	Opérations et conjugués 1	Conservé	
	Opérations et conjugués 2	Conservé	
	Module et argument remarquable	Conservé	
	Transformation d'écriture 1	Conservé	
	Transformation d'écriture 3	Conservé	
	Produit de complexes	Conservé	
	Linéarisation	Nouveau	A partir des formules d'Euler et de la formule du binôme, linéariser des puissances de cos et de sin
	Résolution d'une équation du second degré	Conservé	
	racine carrée complexe	Conservé	
	Racine polynôme complexe deg 2	Conservé	
	Racine nième à reconnaître	Conservé	En cas d'erreur, rediriger vers le fichier Geogebra ?
	Racine nième à calculer	Conservé	
Feuille 5 / Limites	Limites des fonctions de base	Conservé	…ou déplacé au chapitre 0 ?
	Opérations simples sur les limites	Conservé	
	Polynome en l'infini	Conservé	
	Fraction rationnelle en l'infini	Conservé	
	Fraction rationnelle en 0	Conservé	
	Calcul de limites en un autre point que 0	Conservé	MAIS nécessite des explications dans la correction, et pas le simple message « la bonne réponse est… » par défaut
	Limite avec exp(ax+b) et (cx+d)	Conservé	… à l'instar des explications sur ce genre d'exercice
	Formes indéterminées avec ln uniquement	Conservé	…ou sur celui-là
	Correspondance de représentations graphi	Conservé	
	Opération sur les limites 8	Conservé	
	~~Asymptote verticale~~	Supprimé ?	N'est pas utile au programme de révisions (et n'était de toute façon pas évalué)
Feuille 5 / Dérivées	Dérivée, taux d'accroissement	Conservé	
	~~Dérivée de fonctions usuelles~~	Déplacé	Déplacé au chapitre 0
	Dérivée de base	Conservé	Conservé par rapport au précédent supprimé
	~~Dérivation d'un produit~~	Déplacé	Déplacé au chapitre 0
	~~Formules~~	Déplacé ?	Déplacé au chapitre 0
	Composition virtuelle	Conservé	
	Dérivée de fonctions composées	Conservé	
	Croissance et signe	Conservé	
	Dérivées de fonctions réciproques en un po	Nouveau	Avec des fonctions de référence / simples, pour aider à la compréhension
	Dérivées de fonctions réciproques en un po	Conservé	
	Raccordement de fonctions	Conservé	

Feuille 5 / Nouvelles fonctions	Définition et image fonction trigonométrique	Conservé	
	Valeurs remarquables fonction trigonométri	Conservé	
	Correspondance de représentations graphi	Conservé	
	Définition et image fonction trigonométrique	Modifié	Réclamerait peut-être des explications à la correction, pour comprendre et non faire selon ce qu'on voit au premier échec
	Définition et image fonction trigonométrique	Modifié	Réclamerait peut-être des explications à la correction, pour comprendre et non faire selon ce qu'on voit au premier échec
	Dérivée de nouvelles fonctions usuelles	Conservé	
	Croissance comparée	Conservé	
	Dérivée de fonctions composées avec nouv	Conservé	
Feuille 6 / Intégration	Vrai / Faux sur les primitives	Conservé	
	Formule de dérivées et primitives	Conservé	Un peu long mais nécessaire
	Calcul d'une intégrale	Conservé	
	Aire entre une courbe et l'axe des x	Conservé	
	Primitive de forme donnée	Conservé	
	Fonction définitive par une intégrale	Conservé	
	Intégrale avec fonction trigonométrique	Conservé	
	Calcul d'une intégrale	Conservé	
	Intégration par parties	Conservé	
	Calcul intégral III	Conservé	
	Intégration par changement de variable	Nouveau	Avec explications, comme celui intégration par parties
Feuille 7 / Equations diff	Ordre 1, coefficients constants	Conservé	
	Equation différentielle à coefficients consta	Conservé	
	Equation différentielle à coefficients variabl	Conservé	
	Nombre d'exercices : **108**		

Plan pour l'Analyse

Feuille	Exercice	Pensée	Commentaires
Feuille 1 / Suites	Correspondance distance - valeur absolue	Conservé	
	Distance et valeur absolue	Conservé	
	Valeur absolue -> Intervalle	Conservé	
	Calcul de limite	Conservé	
	Fraction de deux termes	Conservé	
	Fraction de trois termes	Conservé	
	Suite arithmético-géométrique	Conservé	
	Utilisation d'une suite auxiliaire	Conservé	voire à noter, si fait par étapes ?
	Théorème de convergence monotone	Conservé	cf. discussion eue avec Chantal Menini
	Borne sup 1	Conservé	
	Borne sup 2	Conservé	peut-être rejoindre avec borne sup 1 ?
	Borne sup 3	Conservé	
	Borne sup 4	Conservé	
	Suites adjacentes	Modifié	Si non, dire pourquoi elles ne le sont pas (quelle condition n'est pas réunie), pour éviter que le choix soit fait aléatoirement
	Suite récurrente 1	Conservé	
	Limite récurrente	Conservé	
	Valeur d'adhérence	Conservé	
	Suite de Cauchy	Nouveau	Montrer qu'une suite est ou non de Cauchy (pour voir si l'étudiant a bien compris la relation et/ou l'équivalence avec suite convergente)
Feuille 2 / Fonctions	Epsilon - Delta II	Conservé	
	Joint II	Conservé	
	Dérivée de fonctions composées	Conservé	
	Calculs de dérivées de fonctions réciproque	Nouveau	Idem qu'en BMS : faire avec une fonction de référence / simple pour que l'étudiant comprenne la méthode
	Calculs de dérivées de fonctions réciproque	Conservé	
	~~Théorèmes sur les fonctions continues et d~~	Déplacé	Déplacé vers le chapitre bilan, pour qu'il y soit plus visible et important pour les étudiants
	Continuité et image intervalle	Conservé	
	Extrema 2	Conservé	
	Rolle	Conservé	
	Accroissements finis 1	Conservé	
Feuille 3 / DL	DL et tangente	Conservé	
	Polynôme de Taylor	Conservé	
	Ordre d'un DL	Conservé	voire à noter
	Dérivée I	Conservé	mais avec une explication de compréhension dans la correction (écrire la formule détaillée du DL, avec le quotient et la factorielle ?)
	Somme de DL	Conservé	
	Somme mixte de DL	Conservé	
	Produit et quotient de DL	Conservé	
	Composition de DL	Conservé	
	Composition de DL	Conservé	
	Calcul du DL d'une composée	Conservé	
	DL de f/g	Conservé	
	Produit de DL	Nouveau	Exercice demandant de faire le produit de deux DL
	Développements limités usuels	Nouveau	Exercice demandant des développements limités composés de fonctions de référence à trouver, car les exercices précédents sont avec des DL donnés (cf exercice 82)
	Limite de DL	Nouveau	Deviner l'ordre minimal pour pouvoir calculer la limite d'une fonction grâce aux DL. (x2)
	DL en l'infini (et l'au-delà)	Nouveau	Exercice pour s'entraîner avec les DL en l'infini, car peu compris par les étudiants
	Formule de Taylor-Lagrange	Nouveau ?	S'entraîner avec la formule de Taylor-Lagrange, et les comparaisons de sin et cos

Plan pour l'Analyse

Feuille 4 / Intégration	Calcul intégral I	Conservé	voire à noter
	Intégration par parties pas à pas	Conservé	
	Primitives de fonctions usuelles	Conservé	
	Positive - Négative	Conservé	
	Positive - Négative II	Conservé	
	Somme de Riemann	Conservé	Mérite des éléments d'explication, en cas d'échec, plutôt que la réponse brute : par exemple, mettre la factorisation de la fonction
	Intégration par parties	Conservé	
	Intégration par changement de variable	Nouveau	Exercice avec un changement de variable
	Primitives de fractions rationnelles	Conservé	
	Primitives de fonctions rationnelles II	Conservé	
	Linéarisation	Nouveau	Exercice pour se rappeler des formules de linéarisation de cos et sin
	Changement de variable avec du sin	Conservé	
	Intégrale avec sin et cos	Conservé	
Feuille 5 / Bilan	Théorèmes sur les fonctions continues et d	Déplacé	Déplacé depuis le chapitre 2
	DL de référence pour position à la courbe	Nouveau	Exercice de détermination d'une équation de tangente et/ou d'une position par rapport à la courbe à partir de fonctions des DL de référence
	Méthode de détermination de limite	Nouveau	Un exercice (avec deux ou trois questions)) avec diverses limites, où l'étudiant doit choisir une méthode de détermination de limite qu'il peut utiliser. Le but ici est de travailler sur la reconnaissance rapide de cas typiques de limites, chose pas travaillée en TD en raison du cadre de cours qui permet à l'étudiant de savoir d'avance quoi utiliser, mais qui est pourtant requise en examen
	Méthode de détermination de limite v2	Nouveau	Idem, mais avec le calcul de la limite en question
	Intégrale	Nouveau	Calculer une intégrale sans que la méthode soit inscrite dans le titre
	Nombre d'exercices : **61**		

Méthode de détermination de limite

On souhaite déterminer la limite éventuelle en <valeur> de la fonction f définie sur $\Re$ par :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Or, $\lim_{x \to <valeur>} P(x) = X$ et $\lim_{x \to <valeur>} Q(x) = Y$, d'où une forme indéterminée.
Quelle méthode peut-on ici utiliser pour lever l'indétermination ?

- Terme prépondérant
- Taux d'accroissement
- Croissance comparée [au S1 uniquement]
- Multiplication par le conjugué
- Théorème de comparaison et/ou des gendarmes
- Changement de variable
- Développement limité [au S2 uniquement]

[Étape 2] Dans ce cas, quelle est la limite ?

$$\lim_{x \to <valeur>} f(x) = [\quad\quad]$$

Pour le choix des fonctions, on peut partir sur un paramétrage en fonction de la méthode souhaitée. L'utilisation d'un quotient tout du long permet de ne pas s'éliminer des méthodes au premier coup d'œil.
Ainsi, on pourra utiliser des fonctions des types suivants, selon les méthodes :

- Terme prépondérant :
  fonctions $\frac{x^n + \dots}{x^m + \dots}$ deux fractions rationnelles quelconques
- Taux d'accroissement :
  fonctions $\frac{cos\, x - 1}{x}$ x-> 0, $\frac{ln(x+1)}{x}$ x -> 0…
- Croissance comparée :
  fonctions composées de diverses fonctions de référence, comme $\frac{\sqrt{x} - ln(x)}{e^x - x^2}$
- Multiplication par le conjugué :
  fonctions avec des racines diverses (cf. polycopié)
- Théorème de comparaison et/ou des gendarmes :
  fonctions avec des sin et des cos imbriqués ?
- Changement de variable : le plus souvent avec y = 1/x, donc $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ …
- Développement limité : fonctions composées de DL de référence, diverses

Se posera le problème des méthodes multiples, qui peut être résolu en variant les fonctions définies dans le programme. Ainsi, on peut imaginer configurer des fonctions à quelques constantes près, qui ont plusieurs réponses possibles. Certes, de nombreux cas pourront être résolus par développement limité… mais l'étudiant comprendra probablement que ce n'est pas la solution la plus simple dans de nombreux cas (quitte à expliquer dans la correction ?)

Intégrale

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Cet exercice, censé vérifier que l'étudiant maîtrise les diverses formes de calcul d'intégration, serait un simple calcul d'intégrales sans que la méthode ne lui soit indiquée dans le titre. On pourrait utiliser les méthodes suivantes :

- fonctions de référence
- changement de variable
- intégration par parties
- intégration de fractions rationnelles
- somme de Riemann (sera certes flagrant…)

Là, le problème de double méthode ne se pose pas, la méthode n'étant pas demandée.

Visualisations de notions de L1

Les visualisations animées créées à partir de GeoGebra et destinées aux étudiants sont disponibles sur Internet, sur les pages suivantes. Sont ici également précisées les descriptions qui accompagnent les animations sur la plateforme *Moodle*.

— **Formules d'Euler**
On cherche ici à visualiser les formules d'Euler (chapitre 4.2), pour tout nombre complexe de module 1, c'est-à-dire sur le cercle trigonométrique, avec la partie complexe sur l'axe des ordonnées. Sélectionnez un bouton à la fois pour afficher une visualisation de la formule correspondante. Vous pouvez faire varier l'angle θ avec le curseur en haut à gauche.
On comprend alors tout nombre complexe de module 1 comme somme du cosinus, et du sinus multiplié par i, d'un de ses arguments (ici, le principal).
Pour retrouver le cosinus (respectivement sinus), on ajoute (respectivement soustrait) au vecteur origine (représentant le complexe $e^{i\theta}$) son symétrique par rapport à l'axe des abscisses (représentant le complexe conjugué $e^{-i\theta}$) : on a ainsi additionné (ou soustrait) $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. On obtient ainsi le double de $\cos(\theta)$ (respectivement le double de $i\sin(\theta)$).
`https://www.chaud.xyz/stage/geogebra/euler/`

— **Racines $n^{ièmes}$ de l'unité**
On veut ici comprendre la proposition 4.8 du cours, sur les racines $n^{ièmes}$ de l'unité. Pour cela, vous pouvez vous-même déplacer le nombre complexe z. La puissance $n^{ième}$ est affichée (par défaut, $n = 4$) : à vous de déplacer z pour déterminer les valeurs de z telles que $z^n = 1$. Les racines s'affichent, sous leur forme exponentielle, lorsque vous les trouvez.
Pour comprendre d'où sort la puissance affichée, vous pouvez activer la case « Afficher les puissances » : on aperçoit bien que $z^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. Vous pouvez également afficher directement toutes les racines. N'hésitez pas à faire varier n, avec le curseur, pour mieux comprendre (et retenir) la formule.
`https://www.chaud.xyz/stage/geogebra/racines/`

— **Sommes supérieure, inférieure**
Ici sont présentées les notions de sommes supérieure et inférieure, sur la fonction définie et dans le cas particulier où la subdivision est régulière. Vous pouvez faire varier n, le nombre d'intervalles de la subdivision des fonctions en escalier. Les valeurs des sommes sont inscrites sous la courbe : vous pouvez calculer l'intégrale entre ces points, et comparer le résultat.
`https://www.chaud.xyz/stage/geogebra/sommes/`

— **Somme de Riemann**
On veut ici illustrer la formule de convergence des sommes de Riemann, sur la fonction définie. Cliquez sur le bouton pour faire varier n, le nombre d'intervalles de la subdivision de la fonction en escalier. Vous pouvez également déplacer les bornes de l'intégrale, ou choisir de prendre la borne à gauche ou à droite de chaque point (cf. cours).
L'intégrale de la fonction en escalier s'affiche sous la courbe : vous pouvez calculer l'intégrale de entre vos points (c'est une fonction de référence...), et comparer le résultat. Plus on augmente n, plus le pas de la subdivision est petit, et lorsque tend vers l'infini on tend vers l'intégrale souhaitée.
`https://www.chaud.xyz/stage/geogebra/riemann/`

Documentation de la course de billes

Projet réalisé par Xavier Caruso, chercheur à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux, et Adrien Chaud, étudiant en L1 Mathématiques à l'Université de Bordeaux, dans le cadre d'une partie de stage.

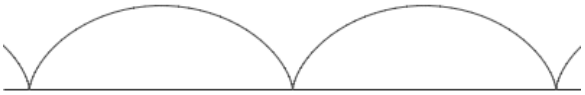
Synopsis

On souhaite réaliser un atelier de courses de billes, afin de promouvoir l'aspect mathématiques ludiques lors de différentes rencontres à l'Université de Bordeaux. La problématique des personnes jouant avec le montage sera la suivante :

Quel est le chemin le plus rapide pour qu'une bille aille d'un point A à un point B, avec un dénivelé de hauteur ?

Historiquement, cette interrogation se nomme le **problème de la courbe brachistochrone**. Quelle est la courbe qui permet à une particule de descendre le plus rapidement d'un point A à un point B ?

La courbe en question est une **cycloïde**. Pour la tracer, imaginez-vous de suivre un point fixe sur le pneu d'une roue de vélo en mouvement. Dans la pratique, cela ressemble à cela :



GIF de **Matthew Conroy**

Cette courbe a d'autres propriétés intéressantes, notamment le fait que toutes les billes lâchées sans vitesse initiale sur la courbe arrivent au même moment, peu importe l'endroit du lâcher sur la courbe.

Choix de conceptions

Aspects matériels

Pour démontrer la solution, on va construire plusieurs trajectoires, de même dimension, mais non de même courbure, qui seront mises côte-à-côte. En lâchant, à l'aide d'un système, les billes en même temps, les étudiants ou autres badauds peuvent s'apercevoir de la courbe la plus rapide.

Il est possible de faire de nombreuses variations de configuration, notamment sur la disposition des pentes pour comparer :

- Tous les profils de pente, côte-à-côte, afin de relâcher les billes en même temps et d'apercevoir en un coup quelle est la courbe solution du problème.
- Mettre sur un même profil différentes pentes, à monter / démonter tel un puzzle pour construire sa courbe parfaite. Cette solution nécessite alors de chronométrer les temps de passage pour pouvoir avoir une comparaison fiable et non à vue & mémoire.

Comme ce projet est censé être pédagogique et ludique pour les jeunes, une solution hybride a été dans notre cas choisie : deux profils côte-à-côte, où les étudiants pourront composer leur courbe qu'il juge la plus rapide. On pourrait ainsi imaginer des duels ou *paris* entre personnes, pour voir qui a la courbe solution.

Concernant la tenue des billes sur la pente, plusieurs solutions sont là aussi légitimes :

- La bille descend dans une rigole, imprimée en 3D, permettant à la bille de rouler sans tomber.
- La bille descend sur la tranche creusée d'une planche.
- La bille descend posée sur deux planches parallèles entre elles, avec un écart suffisant entre elles pour que la bille ne tombe pas.

Cette dernière solution a été choisie dans le cadre de ce projet. Les deux planches sont tenues parallèlement entre elles grâce à des entretoises placées entre les deux planches, le tout est cloué plusieurs fois pour être hyperstatique.

D'autres variations sont possibles, sur des détails :

- **Sur la retenue des billes, avant de les faire tomber sur les pentes** : système d'électroaimant, avec un interrupteur pour activer ou non le ou les aimants qui retiennent des billes en métal ; système de portail qui retient les billes avant la pente...
- **Sur la récupération des billes après la chute** : système de récupération ou de rigole ; butoir en fin de pente...
- **Sur l'aperçu de l'arrivée progressive des billes** : si l'écart entre les billes est trop peu important, il peut être choisi d'installer un système de chronométrage par capteur optique, ou un système lumineux notant la première bille arrivée, par exemple.

Ici ont été choisis un système de fourchette pour retenir les billes avant leur départ, ainsi qu'un chronométrage si le projet est fini en avance, pour permettre aux étudiants de comparer les différentes courbes.

Aspects mathématiques et logiciels

Afin de découper les planches au laser, il est nécessaire de réaliser les courbes au format SVG, à l'aide de logiciels de dessin vectoriel comme Inkscape. **Choix ici a été fait de réaliser les SVG *à la main*, en modifiant le SVG au format XML.**

Pour réaliser les courbes au format SVG, il est nécessaire d'utiliser des **courbes de Bézier**, outil de base du dessin vectoriel. Un des défis est alors d'approximer la courbe solution par une courbe de Bézier.

Le choix du nombre de courbes est à la discrétion du réalisateur : néanmoins, les pentes plus courbées que la courbe solution ne sont que légèrement moins rapide que celles-ci, alors que l'écart est plus important sur les courbes s'approchant d'une droite. Il conviendra de prendre un nombre de courbes adapté pour que la différence de temps soit visible entre les courbes.
De plus, ici, notre volonté d'empiler les courbes les unes sur les autres contraint à ne choisir que quelques courbes, pour éviter d'avoir des pièces trop fines qui se briseraient facilement et seraient difficile à intégrer.

Ainsi, dans le cadre de la réalisation première du projet, ont été décidées d'êtres réalisées quatre courbes :

- la droite allant du point A au point B ;
- la courbe solution du problème ;
- une courbe médiane entre ces deux-ci, donc avec peu de courbure ;
- une courbe hyperbolique, avec une très grande courbure.

Liste des matériaux

- Deux planches de MDF 3 mm : une par course de bille.
- Une planche de MDF 10 mm : où seront découpées les entretoises et le support.
- Une quinzaine de vis 2 x 10 mm : pour attacher les entretoises aux planches de MDF 3 mm.
- Une ou plusieurs billes, de diamètre supérieur à 10 mm, en métal si nécessaire.
- Un logiciel de dessin matriciel **OU** un éditeur de texte et un navigateur web affichant les SVG.
- Une machine de découpe laser.

Réalisation

Étude mathématique

Choix des courbes de Bézier

On utilise pour cela le logiciel *Jupyter*, afin de réaliser de courts algorithmes en Python permettant d'élaborer les courbes de Bézier.

Pour rappel, une courbe de Bézier est définie ici pour quatre points : un point A de départ, un point B d'arrivée, et deux points de contrôle A' et B', tels que le début de la courbe de Bézier est sur la tangente [AA'], et la fin de la courbe sur la tangente [BB'].
Ne pouvant utiliser de caractère ', on notera ces deux derniers points Ap et Bp.

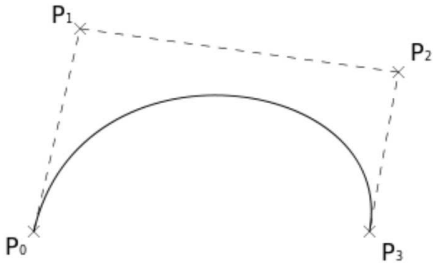


Image de **MarianSigler**

Comme annoncé dans le **synopsis**, on souhaite décrire quatre courbes :

- la droite allant du point A au point B ;
- la courbe solution du problème ;
- une courbe médiane entre ces deux-ci, donc avec peu de courbure ;
- une courbe hyperbolique, avec une très grande courbure.

⚠ **Attention : sur *Jupyter* par défaut, l'axe des ordonnées va vers le haut. Le point d'origine est donc le coin inférieur gauche de la courbe.**

Pour tracer la droite allant du point A au point B, il suffit de prendre la courbe de Bézier avec comme points de contrôle le point milieu du segment [AB].
Pour tracer la courbe hyperbolique, avec une très grande courbure, on ajuste à la volée les points de contrôle de la courbe de Bézier. Ici, nous avons pris comme points de contrôle le point (0, 0).
Idem pour tracer la courbe médiane entre la cycloïde et la droite, ci-dessous tracée en rouge, avec comme points de contrôles choisis les points (0,1 ; 0,2) et (0,4 ; 0,05).

Approximation de la cycloïde par des courbes de Bézier

Mathématiquement, une cycloïde est d'équation paramétrique $\begin{matrix} x(\theta) = \frac{D}{2}(\theta - sin(\theta)) \\ y(\theta) = \frac{D}{2}(1 - cos(\theta)) \end{matrix}$. Dans *Jupyter*, on utilise alors une fonction qui renvoie un point appartenant à la cycloïde à partir d'une valeur comprise entre 0 et 1 :

```
def cycloid(t):
    theta = 314/100*t
    D = 37/100
    return vector((D/2*(theta - sin(theta)), D - D/2*(1 - cos(theta))))
```

Ici, D, qui vaut 0.37, est la hauteur du point de départ de notre cycloïde (choisie ainsi suite à la taille des planches à notre disposition).

On pourra alors afficher la cycloïde, en faisant appel à la fonction `parametric_plot` de Jupyter, qui affiche une courbe en fonction d'un paramètre, ici t, que l'on fait varier entre 0 et 1.
Pour approximer la cycloïde avec des courbes de Bézier, on peut prendre une dizaine de points de contrôle qui sont autant de points de la cycloïde.
Malheureusement, cette solution n'a pas marché pour nous. On s'est ici résolu à approximer la cycloïde avec des segments entre 200 points de la courbe de la cycloïde. Pour les calculer, nous avons utilisé l'algorithme suivant :

```
N = 200
for t in range(N+1):
    M = cycloid(t/N).n()
    print("L %.2f %.2f " % (40+M[0]*1000, 360-M[1]*1000), end="")
```

L'algorithme affiche ici toutes les coordonnées des points, ajustés afin de correspondre aux coordonnées des premiers dessins sur la planche, et précédés de L afin de tracer des lignes en format vectoriel (ceci nous permet de copier le résultat de l'algorithme sans avoir à entrer manuellement les points).

Nous avons ainsi approximé la cycloïde avec des segments. On pourra à loisir augmenter ou diminuer le nombre de segments pour augmenter ou diminuer la précision, mais avec 200 points, la cycloïde une fois découpée ne laisse transparaitre aucune coupure.

Calcul du temps de parcours

Pour rappel, un point M d'une courbe de Bézier est d'équation : $M = t^3A + 3t^2(1-t)A' + 3t(1-t)^2B' + (1-t)^3B$ avec A, A', B', B les points caractéristiques de la courbe de Bézier.

Physiquement, si l'on omet les forces de frottement (plus ou moins importants selon que l'on ait choisi de faire une rigole ou deux planches alignées), on retrouve l'équation de conservation de l'énergie $\frac{1}{2}mv^2 = mgy$. On simplifie par m, puis après quelques opérations, on trouve $v = \sqrt{2gy}$.

On intègre alors pour déterminer le temps.

Là aussi, un algorithme permet de calculer cela pour nous, en lui injectant une courbe (c'est-à-dire un ensemble de points définis par un point) :

```
def timing(curve):
    g = 981/100
    var('t')
    length = curve(t).derivative(t).norm()
    velocity = sqrt(2*g*(curve(0)[1] - curve(t)[1]))
    time = length/velocity
    return integral(time, t, 0, 1).n()
```

On obtient alors ces prévisions de durée de roulement :

Droite	0,511 s
Courbe rouge	0,440 s
Cycloïde	0,419 s
Hyperbole	0,459 s

À l'issue de cette étude, nous avons choisi de créer quatre courbes :

- la droite allant du point de départ au point d'arrivée ;
- la cycloïde, solution de notre problème, approximée par 200 points de passage, qui seront en fait 199 lignes ;
- une courbe de Bézier avec des points de contrôle (0,1 ; 0,2) et (0,4 ; 0,05) ;

- une courbe de Bézier hyperbolique, avec comme points de contrôles l'unique point (0 ; 0).

Les points de départ et d'arrivée des courbes sont les points (0 ; 0,37) et (0,581 ; 0), afin d'obtenir une courbe de 37 centimètres de haut et près de 58 centimètres de large, pouvant contenir dans une planche de MDF.

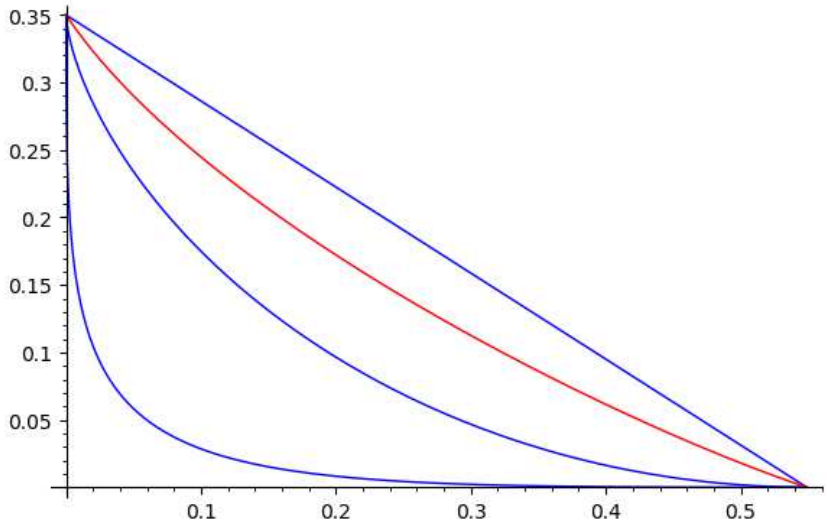


Image des quatre courbes superposées.

Dessin vectoriel

Les fichiers vectoriels ont été réalisés à la main, en modifiant le code XML, à partir des outils disponibles de base dans la spécification 1.1 du format SVG. Toutes les courbes sont des courbes de Bézier, conçus avec la fonction `<path>`. Pour optimiser l'espace, le premier ensemble de courbes est ensuite dupliqué et retourné, à l'aide de la fonction `<g transform="translate(X,X) rotate(180,362,200)">`.

Les premières esquisses sont les simples courbes, ainsi que le rectangle inférieur, afin d'avoir un ensemble fermé. On les dessine à l'aide du code pour les courbes de Bézier :

```
<path d="M 0 410 L 630 410 L 630 360 L 590 360 C 40 360 40 360 40 10 L 25 6.25 L 0 0 Z" fill="none" />
<path d="M 40 10 C 140 160 440 355 590 360" fill="none" stroke="red" />
<path d="M 40 10 L 590 360" fill="none" stroke="red" />
<path d="M 40 10 L 40.00 10.02 L 40.00 10.09 L 40.00 10.19 L 40.01 10.34 L 40.01 10.54 L 40.02 10.78 L 40.04 11.06 L
```

Vous remarquerez qu'on a ajouté au rectangle un bord, à droite, qui servira à récupérer les billes. Ici, le premier chemin correspond au rectangle avec la courbe hyperbolique, formant ainsi une forme fermée ; le deuxième est la courbe de pente faible ; la troisième est la droite ; la quatrième est la cycloïde approximée par les points calculés dans l'étude mathématique. Un algorithme a calculé les points et les a fait précéder du caractère L, afin de dessiner des lignes.

Il manque néanmoins de nombreux éléments pour permettre d'assurer la tenue et la solidité des faces :

- des encoches, en bas des deux faces, qui viendront s'insérer dans une planche support. Cette dernière fait 10 mm de haut. On a ici choisi de faire de grandes encoches de 5 cm.
- une fente où viendra s'insérer un petit panneau, qui retiendra la bille avant d'être relâchée ;
- les trous des nombreuses vis où viendront se placer les entretoises qui viendront coller les deux planches avec 10 mm d'écart, permettant à la bille de rouler dessus.

On rajoute ces éléments au fichier XML, avec les instructions de fondation des trous notamment, spécifiques au matériel utilisé.

Le modèle de la face terminée se trouve en pièces jointes. Sur une d'entre elles a été également inscrit le logo de l'Institut de Mathématiques de Bordeaux, importé grâce à une plateforme simulant un fichier SVG à partir d'une image. Le logo est coloré en une autre couleur, vert, ce qui permettra de distinguer les puissances de laser à utiliser lors de la découpe / gravure.

Les faces ne sont cependant qu'une partie du travail : il manque en effet à concevoir les support et entretoises qui viendront consolider la structure. Pour cela, on se réfère aux coordonnées des points et aux dimensions des entretoises, préalablement notés. Le support ne sera qu'une grosse planche de MDF où viendront s'insérer les faces. Les faces seront ensuite visées entre elles avec au milieu les entretoises, courbe après courbe. Les entretoises doivent là aussi être découpées en plusieurs parties, **qui s'imbriquent les unes dans les autres**, afin de pouvoir imbriquer les courbes entre elles.

Afin de consolider les entretoises, choix a été fait d'utiliser des formes mixtes, c'est-à-dire qui s'imbriquent à la fois sur l'entretoise de niveau précédent, ainsi que sur une entretoise-support, qui reste visée au cadre / bas de la face. Le résultat donne des formes particulières, mais qui ne seront pas visibles une fois le tout monté.

Le modèle du support et des entretoises est disponible en pièce jointe.

Pensez néanmoins à bien calculer les emplacements des trous des vis, qui doivent coller entre les entretoises et la face…

Découpe et montage

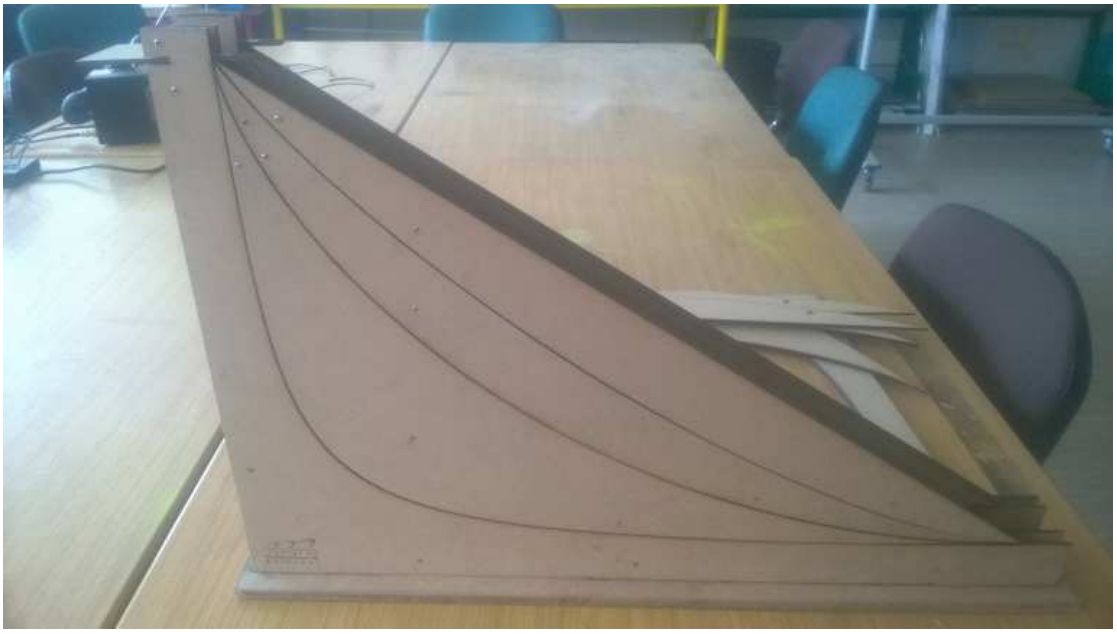
Les fichiers SVG ont ensuite été ouverts sur Inkscape, étape obligatoire à leur impression grâce à la machine laser. Les dimensions ont été revérifiées, puis la machine laser a découpé les deux planches de MDF 3mm et la planche support de MDF 10mm, tout en gravant le logo sur l'une d'entre elles. Il aura néanmoins fallu **faire plusieurs passages de machine laser afin de découper la planche de MDF 10mm**, en raison d'une inclinaison du cadre d'insertion des planches de la machine.
Même après cela, toutes les pièces n'étaient pas complètement, voire pas découpées, et il a fallu faire le reste au cutter.
Par la suite, les courbes ont été visées aux entretoises correspondantes, qui ont ensuite été limées afin d'améliorer leur insertion dans les encoches. Les entretoises support ont été visées aux cadres des courbes. Enfin, à la suite de premiers essais, sur un reliquat de planche de MDF a été découpée une « fourchette » servant à contenir les billes et à les relâcher toutes en même temps, grâce aux encoches prévues dans la découpe des faces. Le tout a été verni, pour une meilleure longévité des planches de MDF.

Résultat et bilan

Une fois monté, la structure — visible ci-dessous — semble solide. Les différentes courbes s'emboitent bien les unes aux autres, même s'il faut faire attention lors de l'emboitement aux bouts des courbes, considérablement plus fragile. Plusieurs modifications ont été apportées depuis, avec notamment une légère entretoise insérée sur le bout de ces courbes, pour contrebalancer le phénomène de vibrations de ces bouts, qui s'enboitaient mal ou surtout bougeaient lorsque la bille roulait.

La fourchette, si insérée complètement, permet de tenir les billes. Le tout reste cependant très précaire, et à la moindre vibration de table, une bille peut partir de celle-ci — la fourchette permettant simplement de faire tenir la bille sur une plan légèrement incliné vers le support. Afin que les billes tombent au même moment, il est nécessaire de tirer fortement sur la fourchette, pour que le sol se dérobe sous les billes, et non qu'elle roule sur celle-ci.

Enfin, concernant la résolution du problème… **la cycloïde est bien la courbe la plus rapide des quatre**. Néanmoins, l'écart sur près de 60 centimètres de large n'est **pas** significatif, voire que peu visible entre deux courbes similaires. Ainsi, en regardant précisément l'arrivée des billes, on voit que la bille à la courbe cycloïde va plus vite qu'une autre, mais pas si on n'y prête pas attention. Exception : l'écart avec la droite est cependant beaucoup plus marqué, de plus d'un dixième de seconde…



Ce travail va cependant être conservé et porté durant les expositions et portes ouvertes où l'Institut de Mathématiques de Bordeaux est présent. Une piste pour corriger ce problème serait de faire atterrir les billes dans des récipients plus ou moins pleins, ou sur des cloches, émettant un son plus ou moins grave, afin de différencier à l'écoute l'arrivée des billes.

D'autres pistes d'améliorations peuvent être proposées, pour des éventuelles réutilisations :

- privilégier les billes en métal, et un système d'aimant lachant celles-ci en même temps, pour éviter des erreurs et des problèmes de lâchement de billes ici ;
- faire une courbe hyperbolique avec une pente qui n'est pas verticale, car la bille peut rebondir sur les parois sinon ;
- surtout, **refaire ceci sur une plus grande longueur, afin de mieux marquer la différence de temps entre deux courbes**.

Ce projet reste néanmoins intéressant, car mélangeant physique et fabrication d'un objet grâce à la découpe laser, avec les mathématiques récréatives.

Fichiers